Interner Bericht[0]

Bemerkungen zur Quantenchromodynamik auf dem Torus
in Axialer und Palumbo-Eichung

Institut für Theoretische Physik III
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Juli 1995

[0]Zusammengestellt von Stephan Seeger.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Quantenchromodynamik in 3+1 Dimensionen **7**

2.1 Die Hamiltonsche Formulierung . . . 7

2.2 Klassische Eichbedingungen für Axiale und Palumbo-Eichung . . . 10

2.3 Quantenmechanische Eichfixierung . . . 12

2.3.1 Die 1. unitäre Eichfixierungstransformation . . . 12

2.3.2 Die 2. unitäre Eichfixierungstransformation in der Axialen Eichung . 20

2.3.3 Die 2. und 3. unitäre Eichfixierungstransformation in der Palumbo-Eichung . . . 26

A Symmetrieausnutzung **30**

B Palumbo-Eichung: Definitionen **32**

C Bezeichnungsabweichungen zur Originalliteratur **35**

Kapitel 1

Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die Theorie, von der man annimmt, daß sie die starke Wechselwirkung — eine der drei fundamentalen Wechselwirkungen der Natur neben elektroschwacher Wechselwirkung und Gravitation — beschreibt. Sie ist in Analogie zur Quantenelektrodynamik (QED) formuliert, die als eine der bestbestätigsten Theorien gilt. Bei beiden Theorien handelt es sich um sogenannte *quantisierte Eichtheorien* — eine spezielle Art von Quantenfeldtheorien —, bei deren Konstruktion man sich fast ausschließlich von Symmetrieprinzipien leiten läßt: Die Suche nach einer Beziehung zwischen den zwei Spinoren, die sich jeweils nach einer der beiden inäquivalenten Selbstdarstellungen der zur Lorentzgruppe isomorphen SL$(2, C)$ transformieren, führt zur Dirac-Gleichung für ein einzelnes relativistisches Massefeld [Ryd87], [Tun85], die sich über ein Variationsprinzip auch aus einer Lagrangedichte ableiten lassen muß. Die in dieser Weise zu konstruierende Lagrangedichte läßt sich leicht auf den Fall von N Massefeldern gleicher Masse verallgemeinern und zeigt dann Invarianz unter Raum-Zeit-Punkt unabhängigen (*globalen*) $[U(N) = U(1) \otimes SU(N)]$-Transformationen[1] der Massefelder. Insbesondere die globalen $SU(N)$-Transformationen[1] werden als *globale Eichtransformationen* bezeichnet. Forderung nach Invarianz der Lagrangedichte unter Raum-Zeit-Punkt *abhängigen* $SU(N)$-Transformationen[1], den *lokalen Eichtransformationen* , führt zur notwendigen Einführung von *Eichfeldern* — auch *Vektorpotentiale* genannt —, die mit ihrem postulierten Transformationsverhalten unter lokalen Eichtransformationen für die Invarianz der Theorie sorgen. Die Gruppe unter der die Theorie invariant formuliert ist, $U(1)$ bzw. $SU(N)$, wird als *Eichgruppe* bezeichnet. Fügt man der Lagrangedichte noch eine beliebige Kombination der Eichfelder hinzu, die forminvariant unter lokalen Eichtransformationen ist und den Forderungen nach Invarianz unter Lorentztransformationen , Rauminversion und Zeitumkehr genügt, zusätzlich noch die Forderung nach Renormierbarkeit der Theorie erfüllt, so erhält man für die mit diesen Forderungen verträgliche Lagrangedichte einen eindeutigen Ausdruck [Mut87].
Dieses Konstruktionsprinzip für $N = 1$ angewandt führt zur QED-Lagrangedichte, für $N = 3$ zur gewöhnlichen QCD-Lagrangedichte. Der Übergang von $N = 1$ zu $N > 1$ bei der Konstruktion von Eichtheorien ist besonders markant, da die $N = 1$ Theorie invariant unter der *abelschen* $U(1)$-Gruppe konstruiert ist, wogegen $N > 1$ Theorien sogar invariant unter der *nichtabelschen* $SU(N)$-Gruppe formuliert sind. Nun weisen diese sogen. *nichtabelschen*

[1] Für $N = 1$ ist hier natürlich einfach $U(1)$ gemeint.

Eichtheorien aber allesamt, wie 1973 u.a. von Politzer [Pol73] gezeigt wurde, die für die starke Wechselwirkung charakteristische Eigenschaft der *asymptotischen Freiheit* auf. Darunter versteht man die Tendenz der Kopplung zwischen Eich- und Massefeld bei großen Impulsen bzw. kleinen Entfernungen zu verschwinden[2]. Da also alle SU(N)-Eichtheorien ($N > 1$) diese zentrale Eigenschaft der starken Wechselwirkung widerspiegeln, kann man der Allgemeinheit wegen die QCD auch mit einer SU(N)-Eichgruppe studieren. Ebenso können wir erwarten, daß die SU(2)-Theorie als einfachster Repräsentant einer nichtabelschen Eichtheorie bereits die wichtigsten Eigenschaften der gewöhnlichen QCD zeigt. Die Annahme, daß der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung die SU(3)-Eichgruppe zugrunde liegt, hat seine Ursache in experimentellen Fakten wie z.B. der Existenz des Δ^{++}-Teilchens, die die SU(2) als Eichgruppe ausschließt, und der Zerfallsrate des Zerfalls $\pi^0 \to 2\gamma$ sowie der Wirkungsquerschnitt der e^+e^- Vernichtung, die sich exzellent mit einer SU(3)-Eichgruppe erklären lassen [Mut87].

In der QED beschreibt das eine Eichfeld nach der Quantisierung der Theorie Photonen, die Quanten des elektromagnetischen Feldes. In der QCD mit einer SU(N)-Eichgruppe gibt es $N^2 - 1$ Eichfelder, die nach der Quantisierung die *Gluonen*, die Feldquanten der starken Wechselwirkung, beschreiben. Die N Massefelder der QCD bezeichnet man als *Quarkfelder*[3] , die sich in der sogen. Eigenschaft der *Farbe* unterscheiden[4]. Die Eichgruppe SU(N) wird daher auch als *Farbgruppe* bezeichnet.

Die lokale Eichinvarianz einer Eichtheorie hat zur Folge, daß unterschiedliche Eichfeldkonfigurationen die gleiche Physik beschreiben und somit eine Redundanz in der Anzahl von Freiheitsgraden in der Theorie vorliegt. Diese Redundanz kann dazu benutzt werden, einige Eichfelder durch eine sogen. *Eichfixierung* zu eliminieren. Klassisch versteht man unter dieser Elimination das zu Null Setzen bestimmter Eichfreiheitsgrade. In der quantisierten Theorie ist jedoch zu beachten, daß es sich bei den Eichfeldern um Operatoren in einem Hilbertraum handelt, die nicht einfach in einer Operatoridentität gleich dem Nulloperator gesetzt werden können, da die kanonischen Kommutatorrelationen zwischen Eichfeldern und deren konjugierten Impulsen beachtet werden müssen. Unter der Elimination von Eichfreiheitsgraden versteht man hier einfach nur, daß die Symmetrie des Hamiltonians derart ausgenutzt wird, daß bestimmte Eichfreiheitsgrade durch Anwendung unitärer Transformationen nicht mehr im Hamiltonian auftreten.

Im Rahmen einer Hamiltonschen Formulierung[5] bietet es sich an — noch unmittelbar bevor man die Theorie durch Forderung kanonischer (Anti-)Kommutatorrelationen quantisiert —, in die sogenannte *Weyl-Eichung*, auch *temporale Eichung* genannnt, überzugehen. Dabei wird auf klassischer Ebene die Null-Komponente des Eichfeldes zu Null gesetzt ($A_0 = 0$), wodurch Schwierigkeiten bei der kanonischen Quantisierung von A_0 — aufgrund des Fehlens der Zeitableitung von A_0 in der Lagrangedichte und dem daraus resultierenden Problem der Definition eines konjugierten Impulses zu A_0 — vermieden werden. Da auf diese Weise die zu A_0 gehörige Euler-Lagrange-Gleichung — das *Gaußsche Gesetz* — verloren geht, muß diese extra als eine Zwangsbedingung an physikalische Zustände gefordert werden: phy-

[2]Dadurch strebt dann auch die Wechselwirkung zwischen 2 Quarks gegen Null.
[3]oder allgemeiner auch Fermionfelder.
[4]Die Farbe i spiegelt sich als i-te Komponente eines N-komponentigen Vektors wider.
[5]Damit ist der Übergang von der Lagrangedichte zur Hamiltondichte gemeint.

sikalische Zustände werden als Eigenzustände des *Gauß-Gesetz-Operators* — dieser ist als der nach Null aufgelöste Term der A_0-Euler-Lagrange-Gleichung in Operatorform erklärt — zum Eigenwert Null definiert.
Diese als Gauß-Gesetz bezeichnete Zwangsbedingung an physikalische Zustände ist insbesondere abhängig von den konjugierten Impulsen $\vec{\Pi}$ der räumlichen Komponenten der Eichfelder $\vec{A}$, die auch in der Weyl-Eichung noch eine Eichfreiheit aufweisen[6]. Das Gauß-Gesetz kann nun *eigentlich* dazu benutzt werden zu entscheiden, welche Eichfreiheitsgrade durch eine weitere Eichfixierung am vorteilhaftesten zu eliminieren sind. Das Kriterium bei dieser Entscheidung ist, nach welchen konjugierten Impulsen der Eichfelder sich das Gauß-Gesetz am leichtesten auflösen läßt. Denn wird eine Eichfixierung in den dazugehörigen Eichfreiheitsgraden vorgenommen, d.h. werden diese Eichfreiheitsgrade durch eine unitäre Transformation aus dem Hamiltonian eliminiert, so kann mit Hilfe des Gauß-Gesetzes ein im physikalischen Sektor gültiger Ausdruck für die konjugierten Impulse dieser Eichfreiheitsgrade gefunden werden, so daß diese ebenfalls im Hamiltonian des physikalischen Sektors nicht mehr auftreten. Erst durch die Elimination von Eichfreiheitsgraden mitsamt den dazugehörigen konjugierten Impulsen aus dem Hamiltonian des physikalischen Sektors wird in konsistenter Weise eine Eichfixierung durchgeführt.
Da das Gauß-Gesetz aber ebenfalls mit der unitären Transformation, die die ausgewählten Eichfreiheitsgrade aus dem Hamiltonian eliminiert, transformiert werden muß, ist es ausreichend, wenn sich das *transformierte* Gauß-Gesetz in einfacher Weise nach irgendwelchen transformierten konjugierten Impulsen auflösen läßt. Dies stellt einen Widerspruch in der Konstruktion dar: einerseits soll das *transformierte* Gauß-Gesetz entscheiden, welche Eichfreiheitsgrade zu eliminieren sind, andererseits kann das Gauß-Gesetz nicht transformiert werden, wenn nicht bekannt ist, welche Eichfreiheitsgrade eliminiert werden sollen. Wir schlagen daher folgendes kanonische Konstruktionsprinzip vor:
Man sucht sich zunächst irgendwelche Eichfreiheitsgrade heraus, die man aus dem Hamiltonian eliminieren möchte, z.B. A_3 in einer Axialen Eichung oder der longitudinale Anteil des Eichfeldes A^l in einer Coulomb-Eichung. Dann konstruiert man den zugehörigen unitären Operator, der diese Elimination bewirkt[7]. Im nächsten Schritt wird dann das Gauß-Gesetz mit der unitären Transformation transformiert. Es wird nun versucht, das transformierte Gauß-Gesetz nach den entsprechenden transformierten konjugierten Impulsen der auserwählten Eichfreiheitsgrade, z.B. $U\Pi_3U^\dagger$ oder $U\Pi^lU^\dagger$, aufzulösen. Ist dies in *einfacher*[8] Weise möglich, so kann die Eichung in den auserwählten Eichfreiheitsgraden konsistent fixiert werden.
Das Auflösen des (transformierten) Gauß-Gesetzes nach konjugierten Impulsen irgendwelcher Eichfreiheitsgrade ist in jedem Fall mit der Invertierung eines Operators verbunden. Wie man sich am einfachsten in der Eigenbasis dieses Operators klar macht — dort können wir den Operator in seiner Wirkung auf einen Basisvektor durch den dazugehörigen Eigenwert ersetzen —, treten Probleme bei der Operatorinvertierung genau dort auf, wo der Operator verschwindene Eigenwerte besitzt. Die bei der Invertierung resultierenden Sin-

[6]Diese Eichfreiheit äußert sich in der Invarianz der Theorie unter raumpunkt-abhängigen aber zeitunabhängigen SU(N)-Transformationen.

[7]Das Konstruktionsprinzip wird in dieser Arbeit detailliert erläutert.

[8]Was *einfach* in diesem Zusammenhang bedeutet, wird weiter unten erläutert.

gularitäten bei verschwindenen Eigenwerten bezeichnet man als *Infrarotsingularitäten* [9]. Um diesen Infrarotschwierigkeiten in wohldefinierter Weise zu begegnen, muß man die Null-Eigenwerte aus dem (kontinuierlichen) Spektrum isolieren, um sie dann in gesonderter Weise zu behandeln. Die erforderliche Diskretisierung des Spektrums wird dadurch erreicht, daß man von dem zu invertierenden Operator, welcher sich als $\vec{x}$-abhängig erweist, fordert, daß er periodischen Randbedingungen unterliegt[10]. Diese Periodizität wird automatisch erfüllt, wenn die Theorie in der Weyl-Eichung von vornherein auf einem Torus mit erzeugenden Kreisen des Umfangs L formuliert wird, d.h. wenn von vornherein für die Eichfelder periodische Randbedingungen [11] und für die Massefelder quasiperiodische Randbedingungen [12] gefordert werden. Man formuliert die Theorie also auf einem Torus, um Infrarotschwierigkeiten geeignet zu begegnen.

Wie bereits erwähnt, werden am vorteilhaftesten diejenigen Eichfreiheitsgrade durch die Eichfixierung eliminiert, nach deren (transformierten) konjugierten Impulsen sich das (transformierte) Gauß-Gesetz am *einfachsten* auflösen läßt. Ob die Auflösung des (transformierten) Gauß-Gesetzes nach (transformierten) konjugierten Impulsen der gerade betrachteten Eichfreiheitsgrade nun einfach ist oder nicht, läßt sich auf formaler Ebene an dieser Stelle noch nicht entscheiden, da die Auflösung des Gauß-Gesetzes nur mit der (formalen) Invertierung eines Operators verbunden ist[13]. Will man die Invertierung jedoch explizit machen, so muß man in die Eigenbasis des zu invertierenden Operators übergehen, um den Operator in seiner Wirkung auf Basisvektoren durch Zahlen (Eigenwerte) ersetzen zu können. Dafür muß notwendigerweise das Eigenwert-Problem des zu invertierenden Operators gelöst werden. Mit der *einfachen* Auflösung des (transformierten) Gauß-Gesetzes ist daher gemeint, daß das Eigenwert-Problem des mit dieser Auflösung verbundenen Operators einfach, d.h. analytisch lösbar ist.

Auf dieses Kriterium hin können nun die üblich verwendeten Eichbedingungen untersucht werden. Die Lorentz-Eichbedingung kommt von vorneherein nicht in Frage, da wir durch Verwendung des Hamiltonschen Formalismus und der Weyl-Eichung uns schon gegen eine kovariante Eichung entschieden haben. Bei der Coulomb-Eichung , in der der longitudinale Anteil des Eichfeldes aus dem Hamiltonian eliminiert wird, ist in der QCD mit der Auflösung des Gauß-Gesetzes nach dem longitudinalen Anteil des konjugierten Impulses die Invertierung eines Operators verbunden, dessen Eigenwert-Problem nicht analytisch gelöst

---

[9] In Anlehnung an die bei Entwicklungen üblich benutzte Basis von ebenen Wellen (Fouriertransformation!), in der Wellenzahlvektoren $\vec{k}$ als Eigenwerte eines Impulsoperators auftreten und verschwindene Eigenwerte somit großen Wellenlängen (infrarot) entsprechen.

[10] Damit sollten auch die Eigenzustände periodischen Randbedingungen unterliegen, was zur Diskretisierung des Spektrums führt.

[11] $\vec{A}(\vec{x}+L\vec{e}_i)=\vec{A}(\vec{x}) \quad ,i=1,2,3.$

[12] $\Psi(\vec{x}+L\vec{e}_i)=e^{i\varphi_i}\Psi(\vec{x}) \quad ,\varphi_i$beliebig. Die Freiheit eines Phasenfaktors besteht, da im Hamiltonian nur Bilinearformen von $\Psi^\dagger$ und Ψ auftreten.

[13] Formal läßt sich das Inverse eines Operators $\hat{O}$ einfach als $\hat{O}^{-1}$ schreiben.

werden kann[14]. Einzig in der *Axialen Eichung* , in der eine räumliche Komponente[15] des Eichfeldes aus dem Hamiltonian eliminiert wird, ist der zu invertierende Operator mit einem analytisch lösbaren Eigenwert-Problem verknüpft.
Es bietet sich also an, die QCD im Hamiltonschen Formalismus in der Weyl-Eichung auf einem Torus zu formulieren und die weitere Eichfixierung in der Axialen Eichung durchzuführen. Nun zeigt sich jedoch, daß die Formulierung auf dem Torus die vollständige Elimination einer räumlichen Komponente des Eichfeldes aus dem Hamiltonian verhindert. In einer Arbeit von Lenz, Thies et al. [Len94.2] wird daher in einem ersten Schritt zunächst soviel von der 3-Komponente des Eichfeldes durch eine unitäre Transformation aus dem Hamiltonian eliminiert, wie mit einer Formulierung auf dem Torus verträglich ist. In einem zweiten Schritt wird dann ein niederdimensionales Feld in den 1,2-Komponenten des Eichfeldes aus dem Hamiltonian entfernt. Dieses Vorgehen bei der Eichfixierung werden wir der Einfachheit halber als Axiale Eichung bezeichnen. In einer von Palumbo vorgeschlagenen klassischen Eichbedingung [Pal86], die von M.Thies in den quantenmechanischen Formalismus der Eichfixierung übertragen wurde [Thi93], wird alternativ in einem ersten Schritt nur soviel von der 3-Komponente des Eichfeldes eliminiert, wie im schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ mit der Auflösung des Gauß-Gesetzes nach dem zugehörigen konjugierten Impuls verträglich ist. Man erwartet daher, daß die sogen. *Palumbo*-Eichung insbesondere für den schwachen Kopplungslimes geeignet ist. In einem 2. und 3. Schritt der Eichfixierung werden dann niederdimensionale Felder in der 2- und 1-Komponente des Eichfeldes — in völliger formaler Analogie zum ersten Schritt der Eichfixierung — aus dem Hamiltonian eliminiert. Sowohl in der Palumbo-Eichung als auch in der Axialen Eichung verbleiben nach der Eichfixierung globale, d.h. $\vec{x}$-unabhängige Rest-Gauß-Gesetze in der Theorie, die nicht mehr durch Auflösung nach konjugierten Impulsen in den Hamiltonian implementiert werden, da eine weitere Auflösung formal sehr aufwendig wird. Diese Rest-Gauß-Gesetze definieren die physikalischen Zustände nach den unitären Eichfixierungstransformationen.

[14] In der QED ist die Coulombeichung die einfachste Eichung, da hier das Gauß-Gesetz nur eine Zwangsbedingung an den konjugierten Impuls der zu eliminierenden Eichfelder darstellt (d.h. nur an $\vec{\Pi}^l = -\vec{E}^l$; ansonsten treten keine Komponenten von $\vec{\Pi}$ im Gauß-Gesetz auf, aufgrund von $\vec{\nabla}\vec{\Pi}^t \equiv 0$). Physikalisch interpretiert bedeutet dies, daß die Coulomb-Eichung dadurch ausgezeichnet ist, daß statische Ladungen in dieser Eichung nicht strahlen (kein $\vec{E}$- und kein $\vec{B}$-Feld, da für statische Ladungen nur das Gauß-Gesetz ein $\vec{E}$-Feld erzeugen kann, genauer gesagt ein $\vec{E}^l$, das in der Coulomb-Eichung jedoch nicht auftritt).
Der zu invertierende Operator ist in der QED mit einem analytisch lösbaren Eigenwert-Problem verbunden.

[15] Im allgemeinen wählt man hier die 3-Komponente des Eichfeldes.

Kapitel 2

Quantenchromodynamik in 3+1 Dimensionen

Die hier vorgestellte Hamiltonsche Formulierung der QCD_{3+1} in der Weyl-Eichung auf dem Torus und die anschließend präsentierte Eichfixierung mittels unitärer Transformationen basiert auf Arbeiten von Lenz, Thies et al. ([Len91], [Thi93], [Len94.1], [Len94.2]). An dieser Stelle sollen die wesentlichen Strukturmerkmale dieser Formulierung sowohl für die Axiale als auch für die Palumbo-Eichung zusammenfassend dargestellt werden. Dabei wird auf das kanonische Konstruktionsprinzip bei der quantenmechanischen Eichfixierung besonderer Wert gelegt.

2.1 Die Hamiltonsche Formulierung

Ausgangspunkt aller dargestellten Überlegungen ist die QCD_{3+1}-Lagrangedichte für eine SU(N)-Theorie,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.1}$$

mit dem Feldstärketensor

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.2}$$

und

$$A_\mu = A^a_\mu \frac{\lambda^a}{2} \quad , \tag{2.3}$$

wobei über $a = 1, \ldots, N^2 - 1$ summiert wird. Wir wollen an dieser Stelle vereinbaren, daß mit Null indizierte Farblabel (a_0) zur sogen. Cartan Unteralegbra der SU(N)-Generatoren — d.h. in der gewöhnlichen Darstellung zu diagonalen λ-Matrizen — gehören[1].

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist so konstruiert, daß sie invariant ist unter der kombinierten Trans-

[1] In der SU(N) gehören $N-1$ der N^2-1 Generatoren zur Cartan Unteralgebra.

formation — einer sogen. Eichtransformation[2] —

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) \quad = \quad e^{ig\beta(x)}\psi(x) \tag{2.4}$$

$$A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'_\mu(x) \quad = \quad e^{ig\beta(x)}\left(A_\mu(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu\right)e^{-ig\beta(x)} \tag{2.5}$$

mit einer beliebigen x_μ-abhängigen SU(N)-Matrix $e^{ig\beta(x)}$.
Durch eine Legendretransformation geht man von der Legendredichte zur Hamiltondichte über,

$$\mathcal{L} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{H} = \Pi_\psi\dot{\psi} + \Pi_{\psi^\dagger}\dot{\psi}^\dagger + \Pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu - \mathcal{L} \quad . \tag{2.6}$$

Da die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ keine Zeitableitung von der Nullkomponente des Eichfeldes enthält, verschwindet der zu A^a_0 konjugierte Impuls,

$$\Pi^a_0 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^a_0\right)} = 0 \quad . \tag{2.7}$$

Daher bietet es sich im Hamiltonschen Formalismus an, in die Weyl-Eichung überzugehen,

$$A^a_0 = 0 \quad , \; a = 1, \ldots, N^2 - 1 \quad . \tag{2.8}$$

In der Weyl-Eichung ergibt sich für den Hamiltonian,

$$H = \int_{L^3} d^3x \; -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_i\Big(\partial_i - igA_i(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x}) + m\psi^\dagger(\vec{x})\beta\psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\Big(\Pi^a_i(\vec{x})\Pi^a_i(\vec{x}) + B^a_i(\vec{x})B^a_i(\vec{x})\Big) \tag{2.9}$$

mit $B^a_i(\vec{x}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^a_{kj}(\vec{x})$. Dabei sind wir von 4er zu 3er Vektoren[3] übergegangen.
Die Theorie soll auf einem Torus mit erzeugenden Kreisen der Länge L formuliert werden, um Infrarotschwierigkeiten bei der späteren quantenmechanischen Eichfixierung zu begegnen[4]. Daher fordert man,

$$\vec{A}(\vec{x} + L\vec{e}_k) \quad = \quad A(\vec{x}) \qquad , \quad k = 1, 2, 3 \quad , \tag{2.10}$$

$$\psi(\vec{x} + L\vec{e}_k) \quad = \quad e^{i\varphi_k}\psi(\vec{x}) \quad , \quad \varphi_k \text{ beliebig} \quad . \tag{2.11}$$

Die Quantisierung der Theorie erfolgt durch Postulieren der kanonischen (Anti-)Kommutatorrelationen[5]

$$\Big[\psi_{\alpha,i}(\vec{x}), \psi^\dagger_{\beta,j}(\vec{y})\Big]_+ \quad = \quad \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_\varphi(\vec{x} - \vec{y}) \qquad , \qquad \begin{array}{l} \alpha, \beta = 1, \ldots, 4 \quad , \\ i, j = 1, \ldots, N \quad , \end{array} \tag{2.12}$$

$$\Big[\Pi^a_k(\vec{x}), A^b_l(\vec{y})\Big]_- \quad = \quad \frac{1}{i}\delta_{kl}\delta_{ab}\delta_{\varphi=0}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \qquad \begin{array}{l} a, b = 1, \ldots, N^2 - 1 \quad , \\ k, l = 1, 2, 3 \end{array} \tag{2.13}$$

[2]Das Transformationsverhalten von A_μ ergibt sich aus der Forderung

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi = i\bar{\psi}'\gamma^\mu(\partial_\mu + igA'_\mu)\psi' \quad \text{mit} \quad \psi' = e^{ig\beta(x)}\psi \quad .$$

[3]$A^i \rightarrow A_i, \quad A_i = -A^i \rightarrow -A_i$.
[4]Siehe dazu auch in der Einleitung.
[5]α ist der Dirac-Index, i ist der Farbindex.

mit der für die Formulierung auf dem Torus geeigneten quasiperiodischen δ-Funktion[6]

$$\delta_\varphi(\vec{z}) = \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{n}} e^{i\vec{p}_{\vec{n},\varphi}\vec{z}} \qquad , \quad \vec{p}_{\vec{n},\varphi} = \frac{1}{L}\left(2\pi\vec{n} + \sum_{i=1}^{3}\varphi_i\vec{e}_i\right) \quad . \tag{2.14}$$

Da uns durch das zu Null Setzen der Nullkomponente des Eichfeldes ($A_0 = 0$) in der Weyl-Eichung die zu A_0 gehörige Euler-Lagrangegleichung — das Gaußsche Gesetz — als Bewegungsgleichung verloren geht, muß diese extra als eine Zwangsbedingung an physikalische Zustände gefordert werden[7]. Physikalische Zustände werden als Eigenzustände des Gauß-Gesetz-Operators $G(\vec{x})$ zum Eigenwert Null definiert,

$$G^a(\vec{x})\big|\mathbf{phys}\big\rangle = 0 \qquad , \; a = 1,\ldots,N^2-1 \quad , \tag{2.15}$$

wobei

$$\begin{aligned} G^a(\vec{x}) \;&\equiv\; \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_0^a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_0^a\right)}\right\} \\ &=\; \partial_i\Pi_i^a(\vec{x}) + gf^{abc}A_i^b(\vec{x})\Pi_i^c(\vec{x}) + g\rho_m^a(\vec{x}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

mit

$$\rho_m^a(\vec{x}) = \psi_i^\dagger(\vec{x})\frac{\lambda_{ij}^a}{2}\psi_j(\vec{x}) \quad . \tag{2.17}$$

Da, wie man leicht nachrechnet,

$$\big[G(\vec{x})\ ,\ H\big] = 0 \quad , \tag{2.18}$$

vertauscht der Gauß-Gesetz-Operator mit dem Zeitentwicklungsoperator e^{-iHt}, so daß das System auch in der Zeitentwicklung im physikalischen Sektor verbleibt.
In der Weyl-Eichung verbleibt eine Eichfreiheit unter beliebigen raumabhängigen aber zeitunabhängigen SU(N)-Transformationen. Wollen wir einen Operator Ω finden, der diese Eichfreiheit beschreibt, so hat dieser Operator demnach folgende Invarianzgleichungen der Theorie zu erfüllen,

$$\psi(\vec{x}) \;\rightarrow\; \psi'(\vec{x}) \;=\; \Omega[\beta]\psi(\vec{x})\Omega^\dagger[\beta] \;=\; e^{ig\beta(\vec{x})}\psi(\vec{x}) \quad , \tag{2.19}$$

$$A_i(\vec{x}) \;\rightarrow\; A_i'(\vec{x}) \;=\; \Omega[\beta]A_i(\vec{x})\Omega^\dagger[\beta] \;=\; e^{ig\beta(\vec{x})}\left(A_i(\vec{x}) + \frac{i}{g}\partial_i\right)e^{-ig\beta(\vec{x})} \quad . \tag{2.20}$$

In dieser Weise ist der Operator der residuellen Eichfreiheit in der Weyl-Eichung $\Omega[\beta]$ zu konstruieren. Man findet,

$$\Omega[\beta] = \exp\left[-i\int_{L^3} d^3x\big(-\Pi_i^a(\vec{x})\partial_i + gf^{abc}A_i^b(\vec{x})\Pi_i^c(\vec{x}) + g\rho_m^a(\vec{x})\big)\beta^a(\vec{x})\right] \quad . \tag{2.21}$$

[6]Die Freiheit in der Wahl des Phasenfaktors φ_i wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Bedeutung haben und ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

[7]Für eine wirklich zwingende Einführung des Gauß-Geseztes siehe [Lev91].

Für periodische Eichfunktionen $\beta^a_{\mathrm{period}}(\vec{x})$ läßt sich eine partielle Integration im Exponenten bei $\Omega[\beta]$ durchführen, so daß man dort den Gauß-Gesetz-Operator erhält,

$$\Omega[\beta_{\mathrm{period}}] = \exp\left[-i\int_{L^3} d^3x G^a(\vec{x})\beta^a_{\mathrm{period}}(\vec{x})\right] \quad , \tag{2.22}$$

d.h. $G^a(\vec{x})$ ist der Generator von Eichtransformationen mit periodischer Eichfunktion.

2.2 Klassische Eichbedingungen für Axiale und Palumbo-Eichung

Bevor wir zur quantenmechanischen Eichfixierung kommen, wollen wir die klassischen Eichbedingungen angeben, die der Axialen bzw. der Palumbo-Eichung entsprechen.
In beiden Eichungen ist es das grobe Ziel, die 3-Komponente des Eichfeldes zu eliminieren,

$$A^c_3(\vec{x}) = 0 \qquad c = 1, \ldots, N^2 - 1 \quad , \tag{2.23}$$

so daß für die Gluonen nur noch zwei Polarisationszustände übrigbleiben. Die vollständige Elimination von A_3 ist jedoch inkompatibel mit den periodischen Randbedingungen[8].
Wenn wir den Konfigurationsraum diskretisieren, so daß wir n Raumpunkte in jeder Raumrichtung erhalten, können wir die Anzahl der mit $A_3 = 0$ verbundenen Eichbedingungen abzählen. Wir erhalten $n^3(N^2 - 1)$ Bedingungen in einer SU(N)-Theorie. In gleicher Weise können wir vorgehen, um die Anzahl der klassischen Eichbedingungen in Axialer und Palumbo-Eichung zu bekommen. Wir fassen in tabellarischer Form zusammen:

[8] Eine detaillierte Begründung folgt in Kapitel 2.3.1.

Axiale Eichung

Klass. Eichbedingungen	Anzahl Eichbedingungen	Bemerkungen
$A_3^{c\neq c_0}(\vec{x}) = 0$	$n^3(N^2-1-(N-1))$ $= n^3(N^2-N)$	keine Bedingung an die zu diagonalen λ^{c_0} gehörenden A_3-Eichfeldkomponenten
$\partial_3 A_3^{c_0}(\vec{x}) = 0$	$n^2(n-1)(N-1)$	keine Bedingung an x_3-Nullmode
$\partial_\perp \int dx_3 A_\perp^{c_0}(\vec{x})$	$(n^2-1)(N-1)$	2-dimensionale Coulombeichung für x_3-Nullmode von $A_\perp^{c_0}(\vec{x})$, $(\perp = 1, 2)$
Summe Eichbedingungen	$n^3(N^2-1)-(N-1)$	$N-1$ Eichbedingungen weniger als bei $A_3 \equiv 0$

Palumbo-Eichung

Klass. Eichbedingungen	Anzahl Eichbedingungen	Bemerkungen
$\partial_3 A_3^c(\vec{x}) = 0$	$n^2(n-1)(N^2-1)$	keine Bedingung an x_3 Nullmode
$\partial_2 \int dx_3 A_2^c(\vec{x}) = 0$	$n(n-1)(N^2-1)$	von der x_3-Nullmode von A_2 wird alles bis auf die x_2-Nullmode eliminiert
$\partial_1 \int dx_2 dx_3 A_1^c(\vec{x}) = 0$	$(n-1)(N^2-1)$	von der x_2, x_3-Nullmode von A_1 wird alles bis auf die x_1-Nullmode eliminiert
Summe Eichbedingungen	$n^3(N^2-1)-(N^2-1)$	N^2-1 Eichbedingungen weniger als bei $A_3 \equiv 0$

Sowohl in der Axialen als auch in der Palumbo-Eichung haben wir weniger Eichbedingungen angegeben, als zur vollständigen Fixierung der Eichung notwendig sind. Dies korrespondiert bei der quantenmechanischen Eichfixierung zu einem globalen, da $\vec{x}$-unabhängigen, Rest-Gauß-Gesetz, das nicht mehr durch Auflösen nach konjugierten Impulsen in den Hamiltonian implementiert wird.

2.3 Quantenmechanische Eichfixierung

Wir wollen uns bei der quantenmechanischen Eichfixierung an folgende Richtschnur[9] im Vorgehen halten. In einem ersten Schritt überlegen wir uns, welche Eichfreiheitsgrade wir aus dem Hamiltonian eliminieren wollen. Wir entscheiden uns hier wie in [Len94.2] für das Eichfeld A_3, da eine Axiale Eichung ein (noch folgendes) Kriterium zur praktischen Durchführbarkeit der Eichfixierung in den auserwählten Eichfreiheitsgraden erfüllt. In einem zweiten Schritt werden wir eine unitäre Transformation U konstruieren, die die auserwählten Eichfreiheitsgrade, hier also A_3, aus dem Hamiltonian entfernt. Dabei wird sich herausstellen, daß die vollständige Elimination von A_3 nicht mit der Formulierung der Theorie auf dem Torus verträglich ist. Es wird daher notwendig sein, das beschriebene Verfahren in einer weiteren unitären Transformation zu wiederholen.
In einem dritten Schritt werden wir das Gauß-Gesetz mit der konstruierten unitären Transformation U transformieren. Mit Hilfe des transformierten Gauß-Gesetzes werden wir dann einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck für die transformierten konjugierten Impulse der auserwählten Eichfreiheitsgrade, hier also für $U\Pi_3 U^\dagger$, bestimmen. Die hierzu nötige Auflösung des transformierten Gauß-Gesetzes ist mit der Invertierung eines Operators verbunden. Diese Invertierung kann nur dann explizit gemacht werden, wenn das Eigenwert-Problem dieses Operators analytisch lösbar ist. Dies stellt das Kriterium zur praktischen Durchführbarkeit der Eichfixierung in den auserwählten Eichfreiheitsgraden dar.
Mit der Elimination von Eichfreiheitsgraden mitsamt den dazugehörigen konjugierten Impulsen aus dem Hamiltonian des physikalischen Sektors wird in konsistenter Weise eine Eichfixierung durchgeführt.

2.3.1 Die 1. unitäre Eichfixierungstransformation

Konstruktion des unitären Operators der 1. quantenmechanischen Eichfixierungstransformation

Wir betrachten den Dirac+Kopplungsterm des Hamiltonians aus (2.9)[10],

$$-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_i\Big(\partial_i - igA_i(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x}) \qquad , \quad i = 1,2,3 \quad .$$

Es ist unser Ziel,

1. A_3 hieraus zu eliminieren und
2. Invarianz im $A_\perp, \psi$ Dirac+Kopplungsterm beizubehalten. $(\perp = 1,2)$

Wir müssen also einen unitären Operator U finden, so daß

1. $$U\left[-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\Big(\partial_3 - igA_3(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x})\right]U^\dagger \qquad = \qquad -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\partial_3\psi(\vec{x}) \quad ,$$

[9] Diese Richtschnur kann selbstverständlich auch bei der Eichfixierung in der QED angewandt werden.
[10] Es ist ausreichend, den Dirac+Kopplungsterm zu betrachten, da $F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$ mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$.

$$2. \qquad U\left[-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(\partial_\perp - igA_\perp(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x})\right]U^\dagger \quad = \quad -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(\partial_\perp - igA_\perp(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x}) \quad .$$

Die 2. Relation wird erfüllt, wenn U wie eine Eichtransformation auf $\psi(\vec{x})$ und $A_\perp(\vec{x})$ wirkt[11],

$$U[\xi]A_\perp(\vec{x})U^\dagger[\xi] \; = \; e^{ig\xi(\vec{x})}\left(A_\perp(\vec{x}) + \frac{i}{g}\partial_\perp\right)e^{-ig\xi(\vec{x})} \tag{2.24}$$

$$U[\xi]\psi(\vec{x})U^\dagger[\xi] \; = \; e^{ig\xi(\vec{x})}\psi(\vec{x}) \quad . \tag{2.25}$$

Die Transformationsgleichung (2.25) für $\psi(\vec{x})$ können wir für die Gleichung 1 verwenden, die die Elimination von $A_3(\vec{x})$ zum Ziel hat. Es folgt aus 1,

$$0 = e^{-ig\xi(\vec{x})}\left(\quad \Big(U[\xi]A_3(\vec{x})U^\dagger[\xi]\Big) \quad + \frac{i}{g}\partial_3\right)e^{ig\xi(\vec{x})} \quad . \tag{2.26}$$

Erinnern wir uns nun daran, daß die QCD in der Weyl-Eichung invariant ist unter[12]

$$A_3(\vec{x}) \quad \to \quad A_3'(\vec{x}) = e^{-ig\xi(\vec{x})}\left(\quad A_3(\vec{x}) \quad + \frac{i}{g}\partial_3\right)e^{ig\xi(\vec{x})} \quad , \tag{2.27}$$

so können wir schlußfolgern, daß, falls

$$U[\xi]A_3(\vec{x})U^\dagger[\xi] = A_3(\vec{x}) \quad , \tag{2.28}$$

$A_3(\vec{x})$ physikalisch äquivalent zu $A_3'(\vec{x}) \equiv 0$ ist. Der unitäre Operator $U[\xi]$ muß die Transformationsgleichungen (2.27, 2.24, 2.25) für $A_3(\vec{x}), A_\perp(\vec{x})$ und $\psi(\vec{x})$ erfüllen. $U[\xi]$ ist in dieser Weise zu konstruieren. Man findet[13],

$$U[\xi] = \exp\left[-i\int_{L^3} d^3x\Big(-\Pi_\perp^a(\vec{x})\partial_\perp + gf^{abc}A_\perp^b(\vec{x})\Pi_\perp^c(\vec{x}) + g\rho_m^a(\vec{x})\Big)\xi^a(\vec{x})\right] \quad . \tag{2.29}$$

Wir verweisen auf Anhang A für die Verallgemeinerung des beschriebenen Konstruktionsschemas auf die Eliminierung von Freiheitsgraden aus Observablen — wie dem Hamiltonoperator — mit einer allgemeinen Symmetrie.

Es muß noch ein expliziter Ausdruck für die Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ gefunden werden. Dazu betrachtet man die Eichtransformationsgleichung (2.27) für das Eichfeld $A_3(\vec{x})$ mit einem $A_3'(\vec{x})$, das identisch Null ist,

$$A_3'(\vec{x}) \; \equiv \; 0 \; = \; e^{-ig\xi(\vec{x})}\left(A_3(\vec{x}) + \frac{i}{g}\partial_3\right)e^{ig\xi(\vec{x})} \quad . \tag{2.30}$$

[11]Eichtransformationen sind ja gerade so konstruiert, daß Dirac+Kopplungsterm invariant unter Eichtransformationen sind!

[12]Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, daß das Vorzeichen von ξ im Vergleich zu (2.20) gewechselt zu haben scheint. Man hat jedoch gegenüber (2.20) nur die Rollen von A und A' vertauscht (vgl. Anhang A).

[13]Dies ist einfacher als man denken sollte: Da $U[\xi]$ wie eine Eichtransformation auf $A_\perp(\vec{x})$ und $\psi(\vec{x})$ wirken soll, bietet es sich an, $U[\xi]$ die gleiche Form in den $\perp$-Komponenten zu geben wie dem Operator der residuellen Eichtransformationen Ω. Dies erfüllt dann trivialerweise auch die 3.Bedingung, daß $U[\xi]$ das Eichfeld $A_3(\vec{x})$ invariant lassen soll, da $U[\xi]$ auf diese Weise kein Π_3 enthält.

Dies ist eine Differentialgleichung für $e^{ig\xi(\vec{x})}$ mit der (formalen) Lösung

$$e^{ig\xi(\vec{x})} = \mathcal{P}\, e^{ig\int_0^{x_3} dz\, A_3(x_\perp,z)} \quad . \tag{2.31}$$

Das $\mathcal{P}$ steht für Pfadordnung und ist notwendig aufgrund der Nichtkommutativität der SU(N)-Generatoren in $A_3(\vec{x}) = \sum_{c=1}^{N^2-1} A_3^c(\vec{x})\frac{\lambda^c}{2}$. Bei dem Ausdruck (2.31) für die Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ tritt nun die Schwierigkeit auf, daß er nicht periodisch in x_3 ist, obwohl $\psi'(\vec{x}) = e^{ig\xi(\vec{x})}\psi(\vec{x})$ ist und sowohl ψ als auch ψ' aufgrund der periodischen Randbedingungen periodisch in x_3 sind. Daher definiert man für die Eichfunktion $\xi(\vec{x})$,

$$e^{ig\xi(\vec{x})} := \left[\mathcal{P}\, e^{ig\int_0^{x_3} dz\, A_3(x_\perp,z)}\right] e^{-ig\frac{\theta(x_\perp)}{L}x_3} \quad , \tag{2.32}$$

wobei für $\theta(\vec{x}_\perp)$ gelten soll,

$$e^{ig\theta(\vec{x}_\perp)} = \mathcal{P}\, e^{ig\int_0^{L} dz\, A_3(x_\perp,z)} \quad . \tag{2.33}$$

Mit der Definition (2.32) für die Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ erhalten wir nun wie gewünscht einen periodischen Ausdruck[14] für $e^{ig\xi(\vec{x})}$. Dieser Ausdruck resultiert jedoch in einem Eichfeld $A_3'(\vec{x})$, das nicht mehr identisch Null ist,

$$A_3'(\vec{x}) = e^{-ig\xi(\vec{x})}\left(A_3(\vec{x}) + \frac{i}{g}\partial_3\right)e^{ig\xi(\vec{x})} = \frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L} \tag{2.34}$$

mit $e^{ig\xi(\vec{x})}$ aus (2.32). Das Eichfeld $A_3(\vec{x})$ wird also nur bis auf seine x_3-Nullmode[15] $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}$ weggeeicht.
Die klassische Eichbedingung, die der Transformation mit $U[\xi]$ mit der Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ aus (2.32) entspricht, lautet

$$\partial_3 A_3^c(\vec{x}) = 0 \quad , \quad c = 1, \ldots, N^2-1 \quad , \tag{2.35}$$

da eine solche Eichbedingung alles von $A_3(\vec{x})$ eliminiert bis auf den von x_3 unabhängigen Anteil, d.h. bis auf die x_3-Nullmode $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}$. Dies ist die erste der in Kapitel 2.2 aufgeführten klassischen Eichbedingungen für die Palumbo-Eichung, so daß die Transformation mit $U[\xi]$ mit der Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ aus (2.32) den ersten Schritt zur Palumbo-Eichung darstellt.
Die Matrix $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}$ kann noch diagonalisiert werden. Daher führt man die unitäre Matrix $e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)}$ ein, die $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}$ diagonalisiert,

$$e^{-ig\Delta(\vec{x}_\perp)}\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)} = a_3(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.36}$$

Definiert man nun für die Eichfunktion $\xi(\vec{x})$

$$e^{ig\xi(\vec{x})} := \left[\mathcal{P}\, e^{ig\int_0^{x_3} dz\, A_3(x_\perp,z)}\right] e^{-ig\frac{\theta(x_\perp)}{L}x_3} e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)} \quad , \tag{2.37}$$

[14] Der Beweis der Periodizität ist aufgrund der Pfadordnung nicht ganz trivial.

[15] Wie Gl.(2.33) andeutet, gilt etwas in der Art von $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L} \simeq \frac{1}{L}\int_0^L dz\, A_3(x_\perp,z)$. Daher bezeichnet man $\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}$ auch als x_3-Nullmode von $A_3(\vec{x})$.

so resultiert dies in einem Eichfeld $A'_3(\vec{x})$ mit

$$A'_3(\vec{x}) = e^{-ig\xi(\vec{x})}\left(A_3(\vec{x}) + \frac{i}{g}\partial_3\right)e^{ig\xi(\vec{x})} = a_3(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.38}$$

Das Eichfeld $A_3(\vec{x})$ kann also aufgrund der Formulierung auf dem Torus nur bis auf seine diagonalisierte x_3-Nullmode $a_3(\vec{x}_\perp)$ weggeeicht werden.
Die klassischen Eichbedingungen, die der Transformation mit $U[\xi]$ mit der Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ aus (2.37) entsprechen, lauten[16]

$$\begin{aligned} A_3^{c\neq c_0}(\vec{x}) &= 0 \quad , \; c = 1, \dots N^2-1 \quad , & (2.39)\\ \partial_3 A_3^{c_0}(\vec{x}) &= 0 \quad , \; c_0 = 1, \dots N-1 \quad . & (2.40)\end{aligned}$$

Dies sind die beiden ersten der in Kapitel 2.2 aufgeführten klassischen Eichbedingungen für die Axiale Eichung, so daß die Transformation mit $U[\xi]$ mit der Eichfunktion $\xi(\vec{x})$ aus (2.37) den ersten Schritt zur Axialen Eichung darstellt.
Das Transformationsverhalten von $\psi(\vec{x})$ und der Eichfelder $A_i(\vec{x})$ unter $U[\xi]$ kennen wir bereits nach Konstruktion. Wir geben zum besseren Vergleich zwischen Axialer und Palumbo-Eichung noch den Dirac+Kopplungsterm nach der 1. unitären Transformation an[17],

$$-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(\partial_\perp - igA_\perp(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x}) - i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\Big(\partial_3 - ig\,\underset{\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}}{a_3(\vec{x}_\perp)}\Big)\psi(\vec{x}) \quad . \tag{2.41}$$

Für $U[\xi]\Pi_3(\vec{x})U^\dagger[\xi]$ wollen wir mit Hilfe des Gauß-Gesetzes einen Ausdruck im physikalischen Sektor finden. Es verbleibt an dieser Stelle das transformierte $\Pi_\perp(\vec{x})$ zu bestimmen. Man erhält unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff Relation[18],

$$U[\xi]\Pi_\perp(\vec{x})U^\dagger[\xi] = e^{ig\xi(\vec{x})}\Pi_\perp(\vec{x})e^{-ig\xi(\vec{x})} \quad , \tag{2.42}$$

mit $e^{ig\xi(\vec{x})}$ aus (2.32), wenn wir anstreben in die Palumbo-Eichung überzugehen, bzw. $e^{ig\xi(\vec{x})}$ aus (2.37), wenn wir in die Axiale Eichung übergehen wollen.
Damit sind wir nun in der Lage, das Gauß-Gesetz (2.15, 2.16) zu transformieren. Es ergibt sich unter Verwendung der jeweiligen Eichfunktion $\xi(\vec{x})$,

$$0 \;=\; U[\xi]G(\vec{x})U^\dagger[\xi]\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = \left[D_3\,\left(U\Pi_3U^\dagger\right) \;+\; e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\right]\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \tag{2.43}$$

mit

$$\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = U[\xi]\big|\mathbf{phys}\big\rangle \tag{2.44}$$

und den Abkürzungen,

$$\begin{aligned} D_3^{ac}(\vec{x}) &= \partial_3\delta^{ac} + gf^{abc}A_3^b(\vec{x}) & (2.45)\\ G_\perp^a(\vec{x}) &= \partial_\perp\Pi_\perp^a(\vec{x}) + gf^{abc}A_\perp^b(\vec{x})\Pi_\perp^c(\vec{x}) + g\rho_m^a(\vec{x}) \quad . & (2.46)\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wollen wir das transformierte Gauß-Gesetz nach den transformierten konjugierten Impulsen der Eichfreiheitsgrade auflösen, die wir durch die unitäre Transformation mit $U[\xi]$ aus dem Hamiltonian entfernt haben.

[16] Der Index c_0 zählt nur die diagonalen SU(N)-Generatoren durch.
[17] a_3 korrespondiert zur Axialen Eichung, $\frac{\theta}{L}$ zur Palumbo-Eichung.
[18] $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \dots$.

Die Auflösung des Gauß-Gesetzes

Wir wollen das transformierte Gauß-Gesetz (2.43) nach $U\Pi_3U^\dagger$ auflösen. Formal geschieht dies einfach durch die Invertierung des Operators $D_3(\vec{x})$,

$$U\Pi_3U^\dagger\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = -\frac{1}{D}e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \tag{2.47}$$

mit $e^{ig\xi}$ aus (2.32), wenn wir in die Palumbo-Eichung übergehen wollen, bzw. mit $e^{ig\xi}$ aus (2.37) beim Übergang zur Axialen Eichung.
Um diesen Ausdruck explizit zu machen, muß $U\Pi_3U^\dagger$ in die Eigenbasis von D_3 entwickelt werden, so daß D_3 in der Wirkung auf seine Eigenvektoren durch seine Eigenwerte ersetzt werden kann. Das Eigenwert-Problem

$$D_3\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} = i\mu_{c,n}(\vec{x}_\perp)\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} \tag{2.48}$$

wird gelöst durch[19]

$$\begin{aligned}\Big(x_3\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} &= \tilde{U}\hat{z}_c\tilde{U}^\dagger\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}nx_3} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l}\tilde{U} = \Big[\mathcal{P}\,e^{ig\int_0^{x_3}dz\,A_3}\Big]\,e^{-ig\frac{\theta}{L}x_3}e^{ig\Delta},\\ \big(\hat{z}_c\big)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{ip}\delta_{jq} \quad , \quad c=c(q,p)\end{array} && (2.49)\\ \mu_{c_{(q,p)},n}(\vec{x}_\perp) &= \frac{2\pi n}{L} + g\big(a_{3_q}(\vec{x}_\perp) - a_{3_p}(\vec{x}_\perp)\big) \quad , \quad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots \quad , && (2.50)\end{aligned}$$

wobei $a_{3_q}(\vec{x}_\perp)$ das q-te Diagonalelement der Diagonalmatrix $a_3(\vec{x}_\perp)$ darstellt. Wir merken an, daß verschwindende Eigenwerte zu $n = 0$ und $c = c_{(q,q)} =: c_0$ gehören. Im Fall des schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ sind verschwindende Eigenwerte bereits äquivalent zu $n = 0$.
Für die Eigenvektoren gelten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation in der Form,

$$\Big(\zeta_{c,n}\Big|\zeta_{c',n'}\Big) = \delta_{cc'}\delta_{nn'} \quad , \tag{2.51}$$

$$\sum_{c,n}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big| = \mathbf{1} \quad . \tag{2.52}$$

Insbesondere gilt durch Einschub eines vollständigen Satzes von x_3-Orts-Farb-Zuständen,

$$\begin{aligned}\Big(\zeta_{c,n}((\vec{x}_\perp))\Big|\zeta_{c',n'}(\vec{x}_\perp)\Big) &= \sum_{a=1}^{N^2-1}\int_0^L dx_3\,\Big(\zeta_{c,n}(\vec{x}_\perp)\Big|x_3,a\Big)\Big(x_3,a\Big|\zeta_{c',n'}(\vec{x}_\perp)\Big)\\ &= \sum_{a=1}^{N^2-1}\int_0^L dx_3\,\zeta^{a*}_{c,n}(\vec{x})\zeta^a_{c',n'}(\vec{x}) \quad .\end{aligned} \tag{2.53}$$

[19]Wir weichen bei der Normierung der Eigenvektoren von der in [Len94.2] gewählten Konvention ab, um die Vollständigkeitsrelation einfacher zu schreiben. Bei uns ist der räumliche Anteil der Eigenvektoren auf $\int_0^L$, in [Len94.2] auf $\frac{1}{L}\int_0^L$ normiert.

Entwickeln wir nun $U\Pi_3 U^\dagger$ in die Eigenvektoren von D_3,

$$\Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big) = \sum_{c,n} \Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big) \quad , \tag{2.54}$$

so können wir mit Hilfe von (2.47) im physikalischen Sektor schreiben,

$$\begin{aligned} \Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big)\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle &= \sum_{c,n} \Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big| - \frac{1}{D} e^{ig\xi} G_\perp e^{-ig\xi}\Big)\ \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \\ &= \Bigg[\sum_{\substack{c,n \\ \mu_{c,n}\neq 0}} \Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|\frac{-e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) + \sum_{\substack{c_0,n=0 \\ \mu_{c_0,0}=0}} \Big|\zeta_{c_0,0}\Big)\Big(\zeta_{c_0,0}\Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big)\Bigg]\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle . \end{aligned} \tag{2.55}$$

Wir erhalten für die Entwicklungskoeffizienten einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck in Form anderer Freiheitsgrade nur dann, wenn der zugehörige Basisvektor kein Eigenvektor von D_3 zum Eigenwert Null ist. Für den Fall des schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ sind verschwindende Eigenwerte bereits äquivalent zu $n = 0$, so daß wir in diesem Fall für noch weniger Entwicklungskoeffizienten einen Ausdruck im physikalischen Sektor erhalten würden. Wollen wir einen auch für den schwachen Kopplungslimes geeigneten Ausdruck für $U\Pi_3 U^\dagger$ bekommen, so dürfen wir das Gauß-Gesetz (2.47) im Fall $n = 0$ nicht ausnutzen,

$$\Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big)\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = \Bigg[\sum_{\substack{c,n \\ n\neq 0}} \Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|\frac{-e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) + \sum_{\substack{c \\ n=0}} \Big|\zeta_{c,0}\Big)\Big(\zeta_{c,0}\Big|U\Pi_3 U^\dagger\Big)\Bigg]\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle . \tag{2.56}$$

In diesem Ausdruck werden also im Gegensatz zur Entwicklung (2.55) $\frac{1}{g}$-Terme vermieden ($\mu_{c,0} \sim g$).

Jene Entwicklungskoeffizienten, für die wir keinen Ausdruck im physikalischen Sektor erhalten konnten, verbleiben als Anteile des transformierten Π_3 in der Theorie. Dies korrespondiert dazu, daß wir das Eichfeld A_3 durch die unitäre Transformation mit $U[\xi]$ auch nicht vollständig aus dem Hamiltonian eliminieren konnten. Bei der Elimination von A_3 bis auf $a_3 = \sum_{c_0=1}^{N-1} a_3^{c_0} \frac{\lambda^{c_0}}{2}$ (Axiale Eichung) verbleiben $N-1$ Freiheitsgrade[20] in der weiteren Theorie. Ebenso verschwinden $N-1$ der Eigenwerte $\mu_{c,n}$, so daß $N-1$ Entwicklungskoeffizienten von Π_3 in der Theorie übrigbleiben. Die Elimination von A_3 bis auf a_3 im ersten Schritt zur Axialen Eichung korrespondiert offensichtlich zur weitestmöglichen Auflösung des Gauß-Gesetzes. Daher wählen wir, wenn wir mit der Eichfunktion ξ aus (2.37) in die Axiale Eichung übergehen wollen, den Ausdruck (2.55) für $U\Pi_3 U^\dagger$ im physikalischen Sektor[21].

Bei der Elimination von A_3 bis auf $\frac{\theta}{L} = \sum_{a=1}^{N^2-1} \frac{\theta^a}{L}\frac{\lambda^a}{2}$ (Palumbo-Eichung) verbleiben N^2-1 Freiheitsgrade in der weiteren Theorie. Ebenso gibt es N^2-1 Eigenwerte $\mu_{c,n}$, die zu $n = 0$ korrespondieren und im Ausdruck (2.56) für $U\Pi_3 U^\dagger$ in N^2-1 Entwicklungskoeffizienten resultierten, für die wir keinen Ausdruck im physikalischen Sektor angeben konnten bzw.

[20]Gemeint sind Freiheitsgrade pro $\vec{x}_\perp$.

[21]$e^{ig\xi}$ in (2.55) ist somit durch (2.37) gegeben.

angeben wollten. Wir werden daher, wenn wir mit der Eichfunktion ξ aus (2.32) den ersten Schritt zur Palumbo-Eichung durchführen, den Ausdruck (2.56) für $U\Pi_3 U[\xi]^\dagger$ im physikalischen Sektor wählen[22]. Offensichtlich ist die Palumbo-Eichung damit die geeignete Eichung für Diskussionen im schwachen Kopplungslimes, da der Ausdruck für $U\Pi_3 U^\dagger$ in (2.56) keine $\frac{1}{g}$-Terme enthält.

Es sei noch angemerkt, daß sich der Anteil von $U\Pi_3 U^\dagger$, für den wir einen Ausdruck im physikalischen Sektor gefunden haben, wie gewöhnlich bei einer Operatorinvertierung auch in einfacher Weise mit Hilfe einer Greensfunktion schreiben läßt,

$$\sum_{\substack{c,n \\ \mu_{c,n}\neq 0 \text{ bzw. } n\neq 0}} \Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|\frac{-e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) = \int_0^L dy_3\, \mathcal{G}(x_\perp, x_3 - y_3)\left(-e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\right) \tag{2.57}$$

mit der aus dieser Relation folgenden Greensfunktion von D_3,

$$\mathcal{G}(x_\perp, x_3 - y_3) = \frac{1}{L}\sum_{\substack{c,n \\ \mu_{c,n}\neq 0 \text{ bzw. } n\neq 0}} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x_3-y_3)}}{i\mu_{c,n}(\vec{x}_\perp)} \quad . \tag{2.58}$$

Wichtige Relationen in der Axialen Eichung

Wir konnten für die Entwicklungskoeffizienten von $U\Pi_3 U^\dagger$ nur dann mit Hilfe des Gauß-Gesetzes (2.47) einen Ausdruck im physikalischen Sektor bekommen, wenn der zugehörige Basisvektor kein Eigenvektor von D_3 zum Eigenwert Null ist. Im Fall verschwindener Eigenwerte $\mu_{c_0,0} = 0$ können wir lediglich die Aussage machen, daß

$$\begin{aligned} 0 = i\mu_{c_0,0}\left(\zeta_{c_0,0}\Big|U\Pi_3 U^\dagger\right)|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle &= \left(\zeta_{c_0,0}\Big| - e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\right)|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle \\ &= \left[\partial_\perp\left(p_\perp^{l\,c_0}\right) + g\rho^{(2)\,c_0}\right]|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle \end{aligned} \tag{2.59}$$

mit[23]

$$p_\perp^{l\,c_0}(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_3\, \Pi_\perp^{l\,c_0}(\vec{x}) \quad , \tag{2.60}$$

$$\rho^{(2)\,c_0}(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_3 \left[f^{c_0bc}A_\perp^b(\vec{x})\Pi_\perp^c(\vec{x}) + \rho_m^{c_0}(\vec{x})\right] \quad , \tag{2.61}$$

wobei $\Pi_\perp^{l\,c_0}$ den 2-dimensionalen longitudinalen Anteil des Impulses $\Pi_\perp^{c_0}$ darstellt, d.h. es gilt $\varepsilon_{ij}\partial_i\Pi_j^{l\,c_0}(\vec{x}) = 0 \quad (i,j = 1,2)$ und — damit $\Pi_\perp^{l\,c_0}$ nicht die $x_\perp$-Nullmode von $\Pi_\perp^{c_0}$ enthält

[22] $e^{ig\xi}$ in (2.56) ist somit durch (2.32) gegeben.

[23] Auch hier weichen wir von der in [Len94.2] gewählten Konvention ab. Nullmoden werden bei uns einheitlich mit dem Faktor $1/L$ versehen, damit z.B. für den Fall, daß $\Pi_\perp^{l\,c_0}$ gleich seiner Nullmode $p_\perp^{l\,c_0}$ ist, keine Subtilitäten auftreten. In [Len94.2] wird der Faktor $1/L$ weggelassen, damit $p_\perp^{l\,c_0}$ konjugiert zu $a_\perp^{l\,c_0}$ ist. Da diese Felder jedoch ohnehin bei der weiteren Eichfixierung eliminiert werden, messen wir dieser Tatsache keine große Bedeutung bei.

— $\int_{L^2} d^2x \Pi_\perp^{l\,c_0} = 0$.
Die Beziehung (2.59), die die Projektion des Gauß-Gesetzes auf $\left(\zeta_{c_0,0}\right|$ darstellt und nicht mit in die im physikalischen Sektor gültige Beziehung für $U\Pi_3 U^\dagger$ implementiert werden konnte, verbleibt als Rest-Gauß-Gesetz zunächst in der Theorie. Erst in einer 2. unitären Transformation werden wir

$$a_\perp^{l\,c_0}(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_3\; A_\perp^{l\,c_0}(\vec{x}) \tag{2.62}$$

aus dem Hamiltonian eliminieren und, um die Eichfixierung konsistent zu machen, mit Hilfe des Rest-Gauß-Gesetzes einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck für $p_\perp^{l\,c_0}$ bestimmen.
Eine weitere wichtige Beziehung besteht zwischen dem Eichfeldanteil $a_3^{c_0}$ und den zu verschwindenen Eigenwerten gehörenden Entwicklungskoeffizienten $\left(\zeta_{c_0,0}\middle| U\Pi_3 U^\dagger\right)$,

$$\left[\sqrt{L}\left(\zeta_{c_0,0}\middle| U\Pi_3 U^\dagger\right)(\vec{x}_\perp)\;,\; a_3^{c_0}(\vec{y}_\perp)\right] = \frac{1}{i}\delta^{(2)}(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp) \quad . \tag{2.63}$$

Da die beiden niederdimensionalen Feldoperatoren also zueinander konjugiert sind, definiert man,

$$p_3^{c_0}(\vec{x}_\perp) := \sqrt{L}\left(\zeta_{c_0,0}\middle| U\Pi_3 U^\dagger\right)(\vec{x}_\perp) \quad , \tag{2.64}$$

um in der Axialen Eichung die weitere Theorie im konjugierten Variablenpaar $a_3^{c_0}, p_3^{c_0}$ zu formulieren. In einer Schrödingerdarstellung der Feldoperatoren können wir somit schreiben,

$$p_3^{c_0}(\vec{x}_\perp) \cong \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta a_3^{c_0}(\vec{x}_\perp)} \quad . \tag{2.65}$$

Wichtige Relationen in der Palumbo-Eichung

Bei der Entwicklung von $U\Pi_3 U^\dagger$ in der Palumbo-Eichung wurde für die zu $n = 0$ gehörenden Entwicklungskoeffizienten $\left(\zeta_{c,0}\middle| U\Pi_3 U^\dagger\right)$ das Gauß-Gesetz (2.47) nicht ausgenutzt bzw. konnte nicht ausgenutzt werden. Da diese Entwicklungskoeffizienten in der weiteren Theorie verbleiben, definieren wir ähnlich wie in der Axialen Eichung

$$p_{c,0}(\vec{x}_\perp) := \sqrt{L}\left(\zeta_{c,0}\middle| U\Pi_3 U^\dagger\right)(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.66}$$

Multiplizieren wir diese Entwicklungskoeffizienten mit den zu $\left(\zeta_{c,0}\right|$ gehörenden Eigenwerten $-i\mu_{c,0}$, so können wir die Eigenwerte in ihrer Wirkung auf $\left(\zeta_{c,0}\right|$ durch den Operator $D_3^\dagger$ ersetzen[24] und das Gauß-Gesetz in der Form (2.43) ausnutzen,

$$i\mu_{c,0}p_{c,0}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = \sqrt{L}\left(\zeta_{c,0}\middle| - e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\right)\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \quad . \tag{2.67}$$

[24] Beachte, daß D_3 antihermitesch ist.

In der Palumbo-Eichung verbleiben diese N^2-1 Relationen als Rest-Gauß-Gesetz in der weiteren Theorie. Wie in [Thi93] gezeigt wird, lassen sich diese Beziehungen auch in folgender Weise schreiben,

$$\left[\int_0^L dx_3\, G_\perp^a(\vec{x}) + gf^{abc}\theta^b(\vec{x}_\perp)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\theta^c(\vec{x}_\perp)}\right]|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle = 0 \quad . \tag{2.68}$$

Der Ausdruck läßt sich noch in eine für die weitere Eichfixierung geeignetere Form bringen. Hierzu verweisen wir auf das Kapitel 2.3.3 .
Zur Herleitung des Ausdrucks (2.68) wird eine andere wichtige Relation benötigt, die wir hier angeben möchten,

$$\left[\sum_c z_c^b(\vec{x}_\perp)p_{c,0}(\vec{x}_\perp)\,,\ \frac{\theta^a(\vec{y}_\perp)}{L}\right] = \frac{1}{i}\delta^{(2)}(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)\delta_{ab} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{c} z_c = e^{ig\Delta}\hat{z}_c e^{-ig\Delta} \\ (\hat{z}_c \text{ aus } (2.49)\ ) \quad . \end{array} \tag{2.69}$$

In einer Schrödingerdarstellung der Feldoperatoren können wir daher schreiben,

$$\sum_c z_c^a(\vec{x}_\perp)p_{c,0}(\vec{x}_\perp) \cong \frac{L}{i}\frac{\delta}{\delta\theta^a(\vec{x}_\perp)} \quad . \tag{2.70}$$

2.3.2 Die 2. unitäre Eichfixierungstransformation in der Axialen Eichung

Durch die erste unitäre Eichfixierungstransformation konnten wir das Eichfeld A_3 nur bis auf die *diagonalisierte* x_3*-Nullmode* $a_3(\vec{x}_\perp) = a_3^{c_0}(\vec{x}_\perp)\frac{\lambda^{c_0}}{2}$ aus dem Hamiltonian entfernen. Grundsätzlich besteht nach dieser Transformation noch die gleiche Forminvarianz des Hamiltonians unter Eichtransformationen wie zuvor. Betrachtet man jedoch nur noch jene Eichtransformationen, die den Hamiltonian in der transformierten Form invariant lassen, d.h. mit a_3 statt A_3, so verbleibt[25] nur noch eine Forminvarianz dieses Hamiltonians unter Eichtransformationen der x_3*-Nullmode* des *diagonalen* Anteils von $A_\perp$ mit nunmehr nur noch beliebigen *diagonalen* $x_\perp$-abhängigen SU(N) Matrizen $e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)}$,

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) \quad &\rightarrow \quad \psi'(\vec{x}) &&= e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)}\psi(\vec{x}) \quad , && (2.71)\\ a_\perp(\vec{x}_\perp) \quad &\rightarrow \quad a'_\perp(\vec{x}_\perp) &&= e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)}\left(a_\perp(\vec{x}_\perp) + \frac{i}{g}\partial_\perp\right)e^{-ig\beta(\vec{x}_\perp)} && (2.72)\\ & &&= a_\perp(\vec{x}_\perp) + \partial_\perp\beta(\vec{x}_\perp) && (2.73) \end{aligned}$$

mit

$$a_\perp(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_3\ A_\perp^{c_0}(\vec{x})\frac{\lambda^{c_0}}{2} \quad . \tag{2.74}$$

Desweiteren verblieb nach der ersten unitären Eichfixierungstransformation ein nicht implementiertes Rest-Gauß-Gesetz (Gl. 2.59) in der Theorie. Wir wollen nun gemäß unser Richtschnur in einer zweiten unitären Eichfixierungstransformation $u^{(2)}$ den Eichfeldanteil $a_\perp^{l\,c_0}$ aus

[25] Wir betrachten hier nicht die diskreten Eichsymmetrien, die auch nach der 2. unitären Eichfixierungstransformation als Restsymmetrien verbleiben.

dem Hamiltonian eliminieren[26]. Dazu werden wir also zunächst eine unitäre Transformation konstruieren, dann das Rest-Gauß-Gesetz transformieren und schließlich das transformierte Rest-Gauß-Gesetz nach $u^{(2)} p_\perp^{l\,c_0} u^{(2)\dagger}$ auflösen, um einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck für den transformierten konjugierten Impuls der auserwählten Eichfreiheitsgrade zu bekommen.
Durch die Elimination von $a_\perp^{l\,c_0}$ und dem dazugehörigen Anteil des konjugierten Impulses $p_\perp^{l\,c_0}$ wird in konsistenter Weise die weitere Eichfixierung durchgeführt.

Konstruktion des unitären Operators der 2. quantenmechanischen Eichfixierungstransformation in der Axialen Eichung

Man führt neue Variablen ein, die die Freiheitsgrade nach der 2. unitären Eichfixierungstransformation darstellen sollen,

$$\tilde{\Pi}_\perp(\vec{x}) = \Pi_\perp(\vec{x}) - p_\perp^l(\vec{x}_\perp) \quad , \tag{2.75}$$
$$\tilde{A}_\perp(\vec{x}) = A_\perp(\vec{x}) - a_\perp^l(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.76}$$

$a_\perp^l$ ist durch (2.62), $p_\perp^l$ durch (2.60) gegeben.
In diesen Variablen lautet der Dirac+Kopplungsterm, der nach der 1. unitären Transformation entstanden ist,

$$\begin{aligned} -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(\partial_\perp - iga_\perp^l(\vec{x}_\perp)\Big)\psi(\vec{x}) \; &- \; i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\big(-ig\tilde{A}_\perp(\vec{x})\big)\psi(\vec{x}) \\ &- \; i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\Big(\partial_3 - iga_3(\vec{x}_\perp)\Big)\psi(\vec{x}) \quad . \end{aligned}$$

Es ist unser Ziel

1. $a_\perp^l(\vec{x}_\perp)$ hieraus zu eliminieren und
2. Invarianz in den übrigen Termen beizubehalten.

Wir müssen also einen unitären Operator $u^{(2)}$ finden, so daß

1. $u^{(2)}\Big[-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(\partial_\perp - iga_\perp^l(\vec{x}_\perp)\Big)\psi(\vec{x})\Big]u^{(2)\dagger} \quad = \quad -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\partial_\perp\psi(\vec{x}) \quad ,$
2. (a) $u^{(2)}\Big[-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(-ig\tilde{A}_\perp(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x})\Big]u^{(2)\dagger} = -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_\perp\Big(-ig\tilde{A}_\perp(\vec{x})\Big)\psi(\vec{x}) \quad ,$
   (b) $u^{(2)}\Big[-i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\Big(\partial_3 - iga_3(\vec{x}_\perp)\Big)\psi(\vec{x})\Big]u^{(2)\dagger} = -i\psi^\dagger(\vec{x})\alpha_3\Big(\partial_3 - iga_3(\vec{x}_\perp)\Big)\psi(\vec{x}) \quad .$

Die Gl.2(b) wird erfüllt, falls

$$u^{(2)}[\alpha]\psi(\vec{x})u^{(2)\dagger}[\alpha] = e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}\psi(\vec{x}) \quad , \tag{2.77}$$
$$u^{(2)}[\alpha]a_3(\vec{x}_\perp)u^{(2)\dagger}[\alpha] = e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}a_3(\vec{x}_\perp)e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)} \tag{2.78}$$

[26]Wir könnten uns hier ebensogut für die Elimination von z.B. $a_2^{c_0}$ entscheiden. Die Elimination von $a_\perp^{l\,c_0}$ stellt jedoch die technisch einfachste Art der weiteren Eichfixierung dar.

mit einer zunächst beliebigen aber nur $x_\perp$-abhängigen[27] SU(N)-Matrix $e^{ig\alpha}$.
Die Transformationsgleichung (2.77) für $\psi(\vec{x})$ kann für die Beziehungen 1 und 2(a) ausgenutzt werden. Aus 2(a) ergibt sich direkt für das Transformationsverhalten von $\tilde{A}_\perp(\vec{x})$,

$$u^{(2)}[\alpha]\tilde{A}_\perp(\vec{x})u^{(2)\dagger}[\alpha] = e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}\tilde{A}_\perp(\vec{x})e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)} \quad . \tag{2.79}$$

und aus 1 ergibt sich,

$$0 = e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)}\left(\quad \left(u^{(2)}[\alpha]a^l_\perp(\vec{x}_\perp)u^{(2)\dagger}[\alpha] \right) \quad + \frac{i}{g}\partial_\perp\right) e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)} \quad . \tag{2.80}$$

Erinnern wir uns nun daran, daß der Hamiltonian in seiner Form nach der ersten Eichfixierungstransformation nur noch invariant ist unter (vgl. 2.72)

$$a_\perp(\vec{x}_\perp) \quad \rightarrow \quad a'_\perp(\vec{x}_\perp) = e^{-ig\beta(\vec{x}_\perp)}\left(a_\perp(\vec{x}_\perp) + \frac{i}{g}\partial_\perp\right) e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)} \tag{2.81}$$

mit diagonaler SU(N)-Matrix $e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)}$, so können wir schlußfolgern, daß, falls[28]

$$u^{(2)}[\alpha]a^l_\perp(\vec{x}_\perp)u^{(2)\dagger}[\alpha] = a^l_\perp \tag{2.82}$$

und falls $e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}$ eine diagonale SU(N)-Matrix ist, d.h.

$$\alpha = \sum_{c_0=1}^{N-1} \alpha^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}}{2} \quad , \tag{2.83}$$

daß dann $a^l_\perp(\vec{x}_\perp)$ physikalisch äquivalent zu $a^{l'}_\perp(\vec{x}_\perp) \equiv 0$ ist.
Da $e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}$ diagonal ist, resultiert für das Transformationsverhalten der diagonalen Matrix a_3 (Gl.2.78) [29],

$$u^{(2)}[\alpha]a_3(\vec{x}_\perp)u^{(2)\dagger}[\alpha] = a_3(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.84}$$

[27]Damit ∂_3 keine Wirkung auf $e^{ig\alpha}$ hat.

[28]Man zeigt leicht, daß aus der Invarianz (2.81) die Invarianz unter

$$a^l_\perp(\vec{x}_\perp) \ \rightarrow \ a^{l'}_\perp(\vec{x}_\perp) = e^{-ig\beta(\vec{x}_\perp)}\left(a^l_\perp(\vec{x}_\perp) + \frac{i}{g}\partial_3\right) e^{ig\beta(\vec{x}_\perp)}$$

folgt (diagonales $e^{ig\beta}$!). In der Tat gilt für den transversalen Anteil $a^t_\perp(\vec{x}_\perp) = a^{t'}_\perp(\vec{x}_\perp)$.
(Dies liefert übrigens für die (abelsche!) QED eine einfache Erklärung, warum eine reine Axiale Eichung hier nicht möglich ist. Der eindimensionale transversale Anteil von A_3 ist die x_3-Nullmode (denn es gilt $\partial_3 A_3 = 0$). Transversale Anteile besitzen in einer abelschen Theorie jedoch keine Eichfreiheit unter periodischen Eichfunktionen. Also kann der transversale Anteil auch nicht weggeeicht werden. In der QCD kann man ganz ähnlich argumentieren, da nach der Eichfixierung bis auf die diagonalisierte x_3-Nullmode a_3 nur noch eine Eichfreiheit unter diagonalen, $x_\perp$-abhängigen SU(N)-Matrizen verbleibt.)

[29]Ebenfalls aus der Diagonalität von $e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}$ folgt, daß sich das Transformationsverhalten von $A_\perp = \tilde{A}_\perp + a^l_\perp$ (siehe 2.79, 2.82) kompakt schreiben läßt als,

$$u^{(2)}[\alpha]A_\perp u^{(2)\dagger}[\alpha] = e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}A_\perp e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)} \quad .$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen (2.77, 2.79, 2.82, 2.84) für $\psi(\vec{x}), \tilde{A}_\perp(\vec{x}), a^l_\perp(\vec{x}_\perp)$ und $a_3(\vec{x}_\perp)$ läßt sich nun der unitäre Operator $u^{(2)}[\alpha]$ konstruieren. Es ergibt sich,

$$u^{(2)}[\alpha] = \exp\left[-igL\int_{L^2} d^2x \sum_{c_0=1}^{N-1} \rho^{(2)\,c_0}(\vec{x}_\perp)\alpha^{c_0}(\vec{x}_\perp)\right] \quad . \tag{2.85}$$

Es muß noch ein expliziter Ausdruck für die Eichfunktion $\alpha(\vec{x}_\perp)$ gefunden werden. Dazu betrachtet man die Eichtransformationsgleichung (2.81) für ein $a^l_\perp(\vec{x}_\perp)$ und mit einem $a^{l'}_\perp(\vec{x}_\perp)$, das identisch Null ist,

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)}\left(a^l_\perp(\vec{x}_\perp) + \frac{i}{g}\partial_\perp\right)e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)} \\ &= a^l_\perp(\vec{x}_\perp) - \partial_\perp\alpha(\vec{x}_\perp) \quad . \end{aligned} \tag{2.86}$$

$\alpha(\vec{x}_\perp)$ muß dieser Differentialgleichung genügen[30] und ist damit abhängig von $a^l_\perp$.
Nach der Konstruktion von $u^{(2)}[\alpha]$ können wir nun $\Pi_\perp(\vec{x})$ transformieren,

$$u^{(2)}[\alpha]\Pi_\perp(\vec{x})u^{(2)\dagger}[\alpha] = e^{ig\alpha(\vec{x}_\perp)}\,\tilde{\Pi}_\perp(\vec{x})\,e^{-ig\alpha(\vec{x}_\perp)} + u^{(2)}\,p^l_\perp(\vec{x}_\perp)\,u^{(2)\dagger} \quad . \tag{2.87}$$

Damit sind wir in der Lage, das Rest-Gauß-Gesetz (2.59) zu transformieren,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\partial_\perp\left(u^{(2)}p^{l\,c_0}_\perp u^{(2)\dagger}\right) + g\left(u^{(2)}\rho^{(2)\,c_0}u^{(2)\dagger}\right)\right]\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \\ &= \left[\partial_\perp\left(u^{(2)}p^{l\,c_0}_\perp u^{(2)\dagger}\right) + g\rho^{(2)\,c_0}\right]\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \end{aligned} \tag{2.88}$$

mit

$$\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle = u^{(2)}[\alpha]\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \tag{2.89}$$

und wobei in $\rho^{(2)\,c_0}$ aus (2.61) $\Pi_\perp(\vec{x})$ durch $\tilde{\Pi}_\perp(\vec{x})$ zu ersetzen ist[31].
Im nächsten Schritt werden wir das transformierte Rest-Gauß-Gesetz nach den transformierten konjugierten Impulsen der Eichfreiheitsgrade auflösen, die wir durch die zweite unitäre Transformation mit $u^{(2)}[\alpha]$ aus dem Hamiltonian entfernt haben.

---

[30] Es gilt also,

$$\alpha(\vec{x}_\perp) = \int_{L^2} d^2y\; d(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)\partial_\perp a^l_\perp(\vec{y}_\perp)$$

mit der Greenschen Funktion d aus (2.105).

[31] Wir haben an dieser Stelle keine Begründung gegeben, warum diese Ersetzung möglich ist, um den systematischen Weg der Eichfixierung gemäß unser Richtlinie nicht zu verlassen. Man kann jedoch zeigen, daß

$$p^{l\,c_0}_\perp\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle = 0 \quad .$$

Auflösung des Rest-Gauß-Gesetzes in der Axialen Eichung

Wir wollen das transformierte Rest-Gauß-Gesetz (2.88) nach $u^{(2)} p_\perp^{l\, c_0} u^{(2)\dagger}$ auflösen. Dazu nutzt man aus, daß der longitudinale Anteil einer Vektorfunktion sich stets als Gradient einer skalaren Funktion schreiben läßt,

$$u^{(2)} p_\perp^{l\, c_0}(\vec{x}_\perp) u^{(2)\dagger} = \partial_\perp \Lambda^{c_0}(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.90}$$

Damit liest sich das Rest-Gauß-Gesetz (2.88),

$$\left[\partial_\perp \partial_\perp \Lambda^{c_0}(\vec{x}_\perp) + g\rho^{(2)\, c_0}(\vec{x}_\perp)\right] \big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle = 0 \quad . \tag{2.91}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun nach $\Lambda^{c_0}(\vec{x}_\perp)$ auflösen, um daraus durch (2-dimensionale) Gradientenbildung schließlich einen Ausdruck für $u^{(2)} p_\perp^{l\, c_0} u^{(2)\dagger}$ zu erhalten. Formal geschieht diese Auflösung einfach durch die Invertierung von $\partial_\perp \partial_\perp =: \Delta_\perp$ [32],

$$\Lambda^{c_0} \big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle = -\frac{1}{\Delta_\perp} g\rho^{(2)\, c_0} \big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \quad . \tag{2.92}$$

Um diesen Ausdruck explizit zu machen, muß Λ^{c_0} in die Eigenbasis von $\Delta_\perp$ entwickelt werden, so daß $\Delta_\perp$ in der Wirkung auf seine Eigenvektoren durch seine Eigenwerte ersetzt werden kann. Das Eigenwert-Problem

$$\Delta_\perp \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big) = \mu_{\vec{n}_\perp} \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big) \tag{2.93}$$

wird gelöst durch

$$\Big(\vec{x}_\perp \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big) = \frac{1}{\sqrt{L^2}} e^{i\frac{2\pi}{L} n_\perp x_\perp} \quad , \; n_\perp = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.94}$$

$$\mu_{\vec{n}_\perp} = -\left(\frac{2\pi}{L} n_\perp\right)^2 \quad . \tag{2.95}$$

Für die Eigenvektoren gelten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen in der Form,

$$\Big(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp} \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}'_\perp}\Big) = \delta_{\vec{n}_\perp \vec{n}'_\perp} \tag{2.96}$$

$$\sum_{\vec{n}_\perp} \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big)\Big(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big| = \mathbf{1} \quad . \tag{2.97}$$

Insbesondere gilt durch Einschub eines vollständigen Satzes von $\vec{x}_\perp$-Ortszuständen,

$$\Big(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp} \Big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}'_\perp}\Big) = \int_{L^2} d^2x \; \tilde{\zeta}^*_{\vec{n}_\perp}(\vec{x}_\perp) \tilde{\zeta}_{\vec{n}'_\perp}(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.98}$$

[32] Das vorgestellte Verfahren kann natürlich auch als Konstruktionsschema für die Greens-Funktion des $\Delta_\perp$-Operators angesehen werden.

Entwickeln wir nun Λ^{c_0} in die Eigenvektoren von $\Delta_\perp$,

$$\big|\Lambda^{c_0}\big) = \sum_{\vec{n}_\perp} \big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\big)\big(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\big|\Lambda^{c_0}\big) \quad , \tag{2.99}$$

so können wir mit Hilfe von (2.92) im physikalischen Sektor schreiben,

$$\begin{aligned}
\big|\Lambda^{c_0}\big)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle &= \sum_{\vec{n}_\perp} \big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\big)\Big(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\Big| - \frac{1}{\Delta_\perp} g\rho^{(2)\,c_0}\Big)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \\
&= \left[\sum_{\vec{n}_\perp \neq 0} \big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\big)\bigg(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\bigg|\frac{-g\rho^{(2)\,c_0}}{-\left(\frac{2\pi}{L}n_\perp\right)^2}\bigg) \quad + \quad \big|\tilde{\zeta}_0\big)\big(\tilde{\zeta}_0\big|\Lambda^{c_0}\big)\right]\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Wir erhalten für die Entwicklungskoeffizienten einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck nur dann, wenn der zugehörige Basisvektor kein Eigenvektor von $\Delta_\perp$ zum Eigenwert Null ist. Im Fall $\mu_{\vec{n}_\perp=0} = 0$ können wir nur die Aussage machen, daß

$$\begin{aligned}
0 = \mu_0\big(\tilde{\zeta}_0\big|\Lambda^{c_0}\big)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle &= \big(\tilde{\zeta}_0\big|g\rho^{(2)\,c_0}\big)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \\
&= Q^{c_0}\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle
\end{aligned} \tag{2.101}$$

mit

$$Q^{c_0} = \int_{L^2} d^2x\; \rho^{(2)\,c_0}(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.102}$$

Die Beziehung (2.101) verbleibt als nicht implementiertes, globales Rest-Gauß-Gesetz in der Theorie und definiert die physikalischen Zustände nach der zweiten unitären Transformation. Durch Bildung des (2-dimensionalen) Gradienten erhalten wir aus der Beziehung (2.100) für Λ^{c_0} den gesuchten Ausdruck für $u^{(2)}p_\perp^{l\,c_0}u^{(2)\dagger}$ im physikalischen Sektor,

$$\begin{aligned}
\big|u^{(2)}p_\perp^{l\,c_0}(\vec{x}_\perp)u^{(2)\dagger}\big)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle &= \partial_\perp \sum_{\vec{n}_\perp \neq 0} \big|\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\big)\bigg(\tilde{\zeta}_{\vec{n}_\perp}\bigg|\frac{-g\rho^{(2)\,c_0}}{-\left(\frac{2\pi}{L}n_\perp\right)^2}\bigg)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle \\
&= -\frac{1}{L}\eta^{c_0}(\vec{x}_\perp)\big|\widehat{\mathbf{phys}}\big\rangle
\end{aligned} \tag{2.103}$$

wobei $\frac{1}{L}\eta^{c_0}$ durch Gl.(2.103) definiert ist bzw. durch

$$-\frac{1}{L}\eta^{c_0}(\vec{x}_\perp) = \partial_\perp \int_{L^2} d^2y\; d(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)\;(-)g\rho^{(2)\,c_0}(\vec{y}_\perp) \tag{2.104}$$

mit der Greenschen Funktion des $\Delta_\perp$-Operators,

$$d(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp) = \frac{1}{L^2}\sum_{\vec{n}_\perp \neq 0} \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}n_\perp(x_\perp - y_\perp)}}{-\left(\frac{2\pi}{L}n_\perp\right)^2} \quad . \tag{2.105}$$

Der in die Definition von $\frac{1}{L}\eta^{c_0}$ mit aufgenommene Faktor $\frac{1}{L}$ soll uns daran erinnern, daß $\frac{1}{L}\eta^{c_0}$ die x_3-Nullmode $\rho^{(2)}$ enthält und somit ebenso ein niederdimensionales Feld ist. Damit münden wir wieder in die in [Len94.2] verwendete Bezeichnungsweise ein.

Wir haben das Transformationsverhalten aller im ursprünglichen Hamiltonian (2.9) auftretenden Größen unter den unitären Transformationen $U[\xi]$ und $u^{(2)}[\alpha]$ bestimmt. Damit kann der transformierte und eichfixierte Hamiltonian des physikalischen Sektors nun ohne große Mühe niedergeschrieben werden. Wir verweisen dazu auf [Len94.2].

2.3.3 Die 2. und 3. unitäre Eichfixierungstransformation in der Palumbo-Eichung

Nachdem wir das Verfahren der quantenmechanischen Eichfixierung am Beispiel der Axialen Eichung detailliert erläutert haben, wollen wir uns nun bei der weiteren Eichfixierung in der Palumbo-Eichung kurz halten. Wir fassen die 3 Schritte, die in der Palumbo-Eichung zur Fixierung der Eichung notwendig sind, der Übersichtlichkeit halber tabellarisch zusammen. Man beachte die formale Ähnlichkeit in den einzelnen Schritten zur Eichfixierung. Der erste Schritt, der hier wiederholend dargestellt ist, diene dabei als Anhaltspunkt.
Im zweiten Schritt der Eichfixierung ist es zunächst das Ziel, die x_3-Nullmode von A_2 zu eliminieren. Daher führt man eine Aufteilung von A_2 in x_3-Nullmode und Nicht-Nullmode durch,

$$A_2(\vec{x}) = \tilde{A}_2(\vec{x}) + a_2(\vec{x}_\perp) \qquad \text{mit} \qquad a_2(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L A_2(\vec{x}) \quad . \tag{2.106}$$

Ebenso geht man im dritten Schritt der Eichfixierung vor, bei dem man die x_2-Nullmode von a_1 eliminieren möchte,

$$a_1(\vec{x}_\perp) = \tilde{a}_1(\vec{x}_\perp) + \bar{a}_1(x_1) \qquad \text{mit} \qquad \bar{a}_1(x_1) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_2\, a_1(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{2.107}$$

In Anhang B finden sich die Definitionen einiger Größen, deren genaue Kenntnis für das Verständnis der Eichfixierung nicht unmittelbar notwendig ist. In Anhang C sind Abweichungen von der bei uns benutzten Konvention zu der in [Thi93] verwendeten dargelegt.

1. Schritt	**2. Schritt**	**3. Schritt**
Gauß-Gesetz: $D_3\Pi_3\big\vert\mathbf{phys}\big\rangle = -G_\perp\big\vert\mathbf{phys}\big\rangle$	Rest-Gauß-Gesetz: $d_2 p_2\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = -G^{(2)}\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle$	Rest-Gauß-Gesetz: $\bar{d}_1\bar{p}_1\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle = -G^{(1)}\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle$
Ziel: $A_3(\vec{x})$ zu eliminieren $\hookrightarrow$ Transformationsverhalten von $\psi, A_\perp, A_3$ unter $U^{(1)}$ $\hookrightarrow \quad U^{(1)}_{[\xi]} = e^{-ig\int d^3x\, G^a_\perp \xi^a}$ mit[33] $e^{ig\xi(\vec{x})}=e^{ig\tau}e^{-ig\frac{\theta}{L}x_3}$ $e^{ig\tau(\vec{x})}=\mathcal{P}\,e^{ig\int_0^{x_3}dz\,A_3}$ $e^{ig\theta(\vec{x}_\perp)}=e^{ig\tau(x_\perp,L)}$ **Resultat:** Elimination von A_3 nur bis auf x_3-Nullmode $\frac{\theta}{L} \simeq \frac{1}{L}\int dx_3 A_3(\vec{x})$	**Ziel**: $a_2(\vec{x}_\perp)$ zu eliminieren $\hookrightarrow$ Transformationsverhalten von $\psi, A_1, \tilde{A}_2, a_2, \frac{\theta}{L}$ unter $U^{(2)}$ $\hookrightarrow \; U^{(2)}_{[\xi']} = e^{-igL\int d^2x\, G^{(2)a}\xi'^a}$ mit $e^{ig\xi'(\vec{x}_\perp)}=e^{ig\tau'}e^{-ig\frac{\theta'}{L}x_2}$ $e^{ig\tau'(\vec{x}_\perp)}=\mathcal{P}\,e^{ig\int_0^{x_2}dy\,a_2}$ $e^{ig\theta'(x_1)}=e^{ig\tau'(x_1,L)}$ **Resultat:** Elimination von a_2 nur bis auf x_2-Nullmode $\frac{\theta'}{L} \simeq \frac{1}{L}\int dx_2 a_2(\vec{x}_\perp)$	**Ziel:** $\bar{a}_1(x_1)$ zu eliminieren $\hookrightarrow$ Transformationsverhalten von $\psi,\tilde{a}_1,\bar{a}_1, \tilde{A}_2,\frac{\theta'}{L},\frac{\theta}{L}$ unter $U^{(3)}$ $\hookrightarrow \; U^{(3)}_{[\xi'']} = e^{-igL^2\int dx\, G^{(1)a}\xi''^a}$ mit $e^{ig\xi''(\vec{x}_\perp)}=e^{ig\tau''}e^{-ig\frac{\theta''}{L}x_1}$ $e^{ig\tau''(x_1)}=\mathcal{P}\,e^{ig\int_0^{x_1}dx\,\bar{a}_1(x)}$ $e^{ig\theta''}=e^{ig\tau''(L)}$ **Resultat:** Elimination von $\bar{a}_1$ nur bis auf x_1-Nullmode $\frac{\theta''}{L} \simeq \frac{1}{L}\int dx_1\bar{a}_1(x_1)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

(Eichfixierung in der Palumbo-Eichung: Fortsetzung)

1. Schritt	**2. Schritt**	**3. Schritt**
transformiertes Gauß-Gesetz: $D_3\big[U^{(1)}\Pi_3U^{(1)\dagger}\big]\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = -e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle$	transformiertes Rest-Gauß-Gesetz: $d_2\big[U^{(2)}p_2U^{(2)\dagger}\big]\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle = -e^{ig\xi'}G^{(2)}e^{-ig\xi'}\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle$	transformiertes Rest-Gauß-Gesetz: $\bar{d}_2\big[U^{(3)}\bar{p}_1U^{(3)\dagger}\big]\big\vert\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle = -e^{ig\xi''}G^{(1)}e^{-ig\xi''}\big\vert\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle$
Eigenwertgleichung: $D_3\big\vert\zeta_{c,n}\big) = i\mu_{c,n}(\vec{x}_\perp)\big\vert\zeta_{c,n}\big)$	Eigenwertgleichung: $d_2\big\vert\zeta'_{c,n}\big) = i\mu'_{c,n}(x_1)\big\vert\zeta'_{c,n}\big)$	Eigenwertgleichung: $\bar{d}_1\big\vert\zeta''_{c,n}\big) = i\mu''_{c,n}\big\vert\zeta''_{c,n}\big)$
$\hookrightarrow$	$\hookrightarrow$	$\hookrightarrow$
$\big\vert U^{(1)}\Pi_3U^{(1)\dagger}\big)\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = \Big[\sum_{\substack{c\\n\neq 0}}\big\vert\zeta_{c,n}\big)\Big(\zeta_{c,n}\Big\vert\frac{-e^{ig\xi}G_\perp e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) + \sum_{\substack{c\\n=0}}\big\vert\zeta_{c,n}\big)\Big(\zeta_{c,n}\Big\vert U^{(1)}\Pi_3U^{(1)\dagger}\Big)\Big]\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle$	$\big\vert U^{(2)}p_2U^{(2)\dagger}\big)\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle = \Big[\sum_{\substack{c\\n\neq 0}}\big\vert\zeta'_{c,n}\big)\Big(\zeta'_{c,n}\Big\vert\frac{-e^{ig\xi'}G^{(2)}e^{-ig\xi'}}{i\mu'_{c,n}}\Big)' + \sum_{\substack{c\\n=0}}\big\vert\zeta'_{c,n}\big)\Big(\zeta'_{c,n}\Big\vert U^{(2)}p_2U^{(2)\dagger}\Big)'\Big]\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle$	$\big\vert U^{(3)}\bar{p}_1U^{(3)\dagger}\big)\big\vert\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle = \Big[\sum_{\substack{c\\n\neq 0}}\big\vert\zeta''_{c,n}\big)\Big(\zeta''_{c,n}\Big\vert\frac{-e^{ig\xi''}G^{(1)}e^{-ig\xi''}}{i\mu''_{c,n}}\Big)'' + \sum_{\substack{c\\n=0}}\big\vert\zeta''_{c,n}\big)\Big(\zeta''_{c,n}\Big\vert U^{(3)}\bar{p}_1U^{(3)\dagger}\Big)''\Big]\big\vert\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle$
Rest-Gauß-Gesetz: $d_2p_2\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = -G^{(2)}\big\vert\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle$	Rest-Gauß-Gesetz: $\bar{d}_1\bar{p}_1\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle = -G^{(1)}\big\vert\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle$	**globales Rest-Gauß-Gesetz:** $gQ^a_{\mathrm{tot}}\big\vert\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle = 0 \quad , \quad a=1\ldots N^2-1$
mit $p_2(\vec{x}_\perp)=\frac{1}{L}\int_0^L dx_3\,\Pi_2(\vec{x})$ $d_2^{ac}(\vec{x}_\perp)=\partial_2\delta^{ac}+gf^{abc}a_2^b(\vec{x}_\perp)$ $G^{(2)}(\vec{x}_\perp)=$ s.Anhang B	mit $\bar{p}_1(x_1)=\frac{1}{L}\int_0^L dx_2\,p_1(\vec{x}_\perp)$ $=\frac{1}{L^2}\int dx_2dx_3\,\Pi_1(\vec{x})$ $\bar{d}_1^{ac}(x_1)=\partial_1\delta^{ac}+gf^{abc}\bar{a}_1^b(x_1)$ $G^{(1)}(x_1)=$ s.Anhang B	für Q^a_{tot} siehe Anhang B

Es sei erwähnt, daß die nach der dritten unitären Eichfixierungstransformation übrigbleibenden N^2-1 Zwangsbedingungen des Rest-Gauß-Gesetzes nicht weiter aufgelöst werden, damit die Theorie auch im schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ wohlverhalten ist.
Wir möchten auf den engen Zusammenhang zwischen Gauß- bzw. Rest-Gauß-Gesetz und der jeweiligen unitären Eichfixierungstransformation aufmerksam machen: Schreibt man

[33] Wir haben im Exponenten von $U^{(1)}$ eine partielle Integration durchgeführt. Dies erklärt den Unterschied zu (2.29).

das Gauß- bzw. Rest-Gauß-Gesetz in einer Form, so daß ein auf den Anteil des konjugierten Impulses, der dem Anteil des zu eliminierenden Eichfeldes entspricht, wirkender Operator gleich den übrigen Termen des Gauß-Gesetzes ist, so hat man schon den Generator der Eichfixierungstransformation gefunden (vgl. oben). Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein, so daß dies eine allgemeine Anleitung zum Auffinden der unitären Eichfixierungstransformation darstellt.

Der eichfixierte Hamiltonian kann nun ohne prinzipielle Schwierigkeiten niedergeschrieben werden. Wir verweisen dazu auf [Thi93].

Anhang A

Elimination von Freiheitsgraden aus einer symmetrischen Observablen

$H(\psi, A)$ sei eine Observable, die invariant unter einer Symmetrietransformation $\mathcal{S}$ ihrer Variablen ist, d.h.

$$H(\psi, A) = H(\mathcal{S}\psi, \mathcal{S}A). \tag{A.1}$$

Bei der Symmetrie könnte es sich beispielsweise um eine Eichsymmetrie handeln, so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\alpha \psi &= e^{ig\alpha}\psi \quad , & \text{(A.2)} \\ \mathcal{S}_\alpha A &= e^{ig\alpha}\Big(A + \frac{i}{g}\partial_x\Big)e^{-ig\alpha} \quad . & \text{(A.3)} \end{aligned}$$

Diese Symmetrie läßt sich auch durch einen auf H wirkenden unitären Operator ausdrücken,

$$\Omega_{[\mathcal{S}_\beta]}\; H(\psi, A)\; \Omega^\dagger_{[\mathcal{S}_\beta]} = H(\mathcal{S}_\beta\psi, \mathcal{S}_\beta A) \quad . \tag{A.4}$$

Die Physik ist invariant unter unitären Transformationen von H mit U, da sich physikalische Größen lediglich von Matrixelementen von Observablen ableiten, z.B.

$$\big\langle \Phi \big| H \big| \Phi \big\rangle = \big\langle \tilde{\Phi} \big| U H U^\dagger \big| \tilde{\Phi} \big\rangle \qquad \text{mit} \qquad \big|\tilde{\Phi}\big\rangle = U\big|\Phi\big\rangle \quad . \tag{A.5}$$

Wir betrachten einen unitären Operator U, der wie folgt auf H wirkt,

$$U_{[\mathcal{S}_\alpha]} H(\psi, A) U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = H(\mathcal{S}_\alpha\psi, A) \quad . \tag{A.6}$$

Dann gilt auch,

$$\begin{aligned} U_{[\mathcal{S}_\alpha]} H(\psi, A) U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} &\stackrel{!}{=} U_{[\mathcal{S}_\alpha]} \Big[\Omega_{[\mathcal{S}_\beta]} H(\psi, A) \Omega^\dagger_{[\mathcal{S}_\beta]}\Big]\, U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = U_{[\mathcal{S}_\alpha]} H(\mathcal{S}_\beta\psi, \mathcal{S}_\beta A) U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} \\ &= H(\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\psi, \mathcal{S}_\beta A) \quad . \end{aligned} \tag{A.7}$$

Wählt man $\mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha^{-1}$, so erhält man,

$$U_{[\mathcal{S}_\alpha]} H(\psi, A) U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = H(\psi, \mathcal{S}_\alpha^{-1} A) \quad . \tag{A.8}$$

Besitzt die Gleichung $\mathcal{S}_\alpha^{-1} A = 0$ eine Lösung für α, so können wir A aus H mit Hilfe von U eliminieren,

$$U_{[\mathcal{S}_\alpha]} H(\psi, A) U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = H(\psi, 0) \qquad \text{mit } \alpha \text{ aus} \quad \mathcal{S}_\alpha^{-1} A = 0 \quad . \tag{A.9}$$

Da $\Omega_{[\mathcal{S}_\beta]}$ durch $\mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha^{-1}$ ein fester Wert zugewiesen wurde, besitzt H in der Form $H(\psi, 0)$ keine Symmetrie mehr. Falls es sich bei der Symmetrie um eine Eichsymmetrie handelt, sagen wir, die Eichung sei fixiert.
Die Transformationsgleichung (A.6) von H unter U wird erfüllt, falls

$$U_{[\mathcal{S}_\alpha]} \psi U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = \mathcal{S}_\alpha \psi \quad , \tag{A.10}$$

$$U_{[\mathcal{S}_\alpha]} A U^\dagger_{[\mathcal{S}_\alpha]} = A \quad . \tag{A.11}$$

Mit Hilfe dieser Transformationsgleichungen ist bei gegebener Symmetrie $U_{[\mathcal{S}_\alpha]}$ zu konstruieren. Man erkennt die allgemeine Regel, daß die beizubehaltenden Variablen sich unter U wie unter einer Symmetrietransformation transformieren und die zu eliminierenden Variablen invariant unter U sind.

Anhang B

Palumbo-Eichung: Definitionen

Die in Kapitel 2.3.3 auftretenden Abkürzungen lauten,

$$
\begin{aligned}
G^{(2)a}(\vec{x}_\perp) &= g\rho_\theta^{(2)a}(\vec{x}_\perp) + \frac{1}{L}\int_0^L dx_3 \Big(g\rho_m^a(\vec{x}) + gf^{abc}A_1^b(\vec{x})\Pi_1^c(\vec{x}) + gf^{abc}\tilde{A}_2^b(\vec{x})\tilde{\Pi}_2^c(\vec{x}) \Big), && \text{(B.1)} \\
G^{(1)a}(x_1) &= g\rho_{\theta'}^{(1)a}(x_1) + \frac{1}{L}\int_0^L dx_2 \Big[g\rho_\theta^{(2)a}(\vec{x}_\perp) + gf^{abc}\tilde{a}_1^b(\vec{x}_\perp)\tilde{p}_1^c(\vec{x}_\perp) \\
&\qquad + \frac{1}{L}\int_0^L dx_3 \Big(g\rho_m^a(\vec{x}) + gf^{abc}\tilde{A}_\perp^b(\vec{x})\tilde{\Pi}_\perp^c(\vec{x}) \Big) \Big], && \text{(B.2)} \\
G^{(0)a} &= g\rho_{\theta''}^{(0)a} + \frac{1}{L}\int_0^L dx_1\, G^{(1)a}(x_1) \quad , && \text{(B.3)} \\
gQ_{\text{tot}}^a &= L^3 G^{(0)a} && \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
g\rho^{(2)a}(\vec{x}_\perp) &= \frac{1}{L}\sum_c z_c^a(\vec{x}_\perp) i\mu_{c,0}(\vec{x}_\perp) p_{c,0}(\vec{x}_\perp) \\
&\cong \frac{1}{L} gf^{abc}\theta^b(\vec{x}_\perp)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\theta^c(\vec{x}_\perp)} \quad , && \text{(B.5)} \\
g\rho^{(1)a}(x_1) &= \frac{1}{L^2}\sum_c z_c^{\prime a}(x_1) i\mu_{c,0}(x_1) p'_{c,0}(x_1) \\
&\cong \frac{1}{L^2} gf^{abc}\theta'^b(x_1)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\theta'^c(x_1)} \quad , && \text{(B.6)} \\
g\rho_{\theta''}^{(0)a} &= \frac{1}{L^3}\sum_c z_c^{\prime\prime a} i\mu''_{c,0} p''_{c,0} \\
&\cong \frac{1}{L^3} gf^{abc}\theta''^b \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\theta'^c} && \text{(B.7)}
\end{aligned}
$$

mit

$$\begin{aligned}
z_c(\vec{x}_\perp) &= e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)}\hat{z}_c e^{-ig\Delta(\vec{x}_\perp)} \quad , \quad & e^{-ig\Delta(\vec{x}_\perp)}\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)} &= a_3(\vec{x}_\perp) \quad , \\
z'_c(x_1) &= e^{ig\Delta'(x_1)}\hat{z}'_c e^{-ig\Delta'(x_1)} \quad , \quad & e^{-ig\Delta'(x_1)}\frac{\theta'(x_1)}{L}e^{ig\Delta'(x_1)} &= a'_2(x_1) \quad , \\
z''_c &= e^{ig\Delta''}\hat{z}''_c e^{-ig\Delta''} \quad , \quad & e^{-ig\Delta''}\frac{\theta''}{L}e^{ig\Delta''} &= a''_1 \quad ,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$(\hat{z}_c)_{ij} = (\hat{z}'_c)_{ij} = (\hat{z}''_c)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{ip}\delta_{jq} \quad , \quad c = c(q,p) \tag{B.9}$$

und mit

$$\mu_{c,n}(\vec{x}_\perp) = \frac{2\pi n}{L} + g\Big(a_{3_q}(\vec{x}_\perp) - a_{3_p}(\vec{x}_\perp)\Big) \quad , \tag{B.10}$$

$$\mu'_{c,n}(x_1) = \frac{2\pi n}{L} + g\Big(a'_{2_q}(x_1) - a'_{2_p}(x_1)\Big) \quad , \tag{B.11}$$

$$\mu''_{c,n} = \frac{2\pi n}{L} + g\Big(a''_{1_q} - a''_{1_p}\Big) \quad , \tag{B.12}$$

$$p_{c,0}(\vec{x}_\perp) = \sqrt{L}\Big(\zeta_{c,0}\Big|U^{(1)}\Pi_3 U^{(1)\dagger}\Big)(\vec{x}_\perp) \quad , \tag{B.13}$$

$$p'_{c,0}(x_1) = \sqrt{L}\Big(\zeta'_{c,0}\Big|U^{(2)}p_2 U^{(2)\dagger}\Big)'(x_1) \quad , \tag{B.14}$$

$$p''_{c,0} = \sqrt{L}\Big(\zeta''_{c,0}\Big|U^{(3)}\bar{p}_1 U^{(3)\dagger}\Big)'' \tag{B.15}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Big(x_3\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} &= \tilde{U}\hat{z}_c\tilde{U}^\dagger\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}nx_3} \quad , \quad & \tilde{U} &= e^{ig\tau(\vec{x})}e^{-ig\frac{\theta(\vec{x}_\perp)}{L}x_3}e^{ig\Delta(\vec{x}_\perp)} \quad , \\
\Big(x_2\Big|\zeta'_{c,n}\Big)'_{(x_1)} &= \tilde{U}'\hat{z}'_c\tilde{U}'^\dagger\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}nx_2} \quad , \quad & \tilde{U}' &= e^{ig\tau'(\vec{x}_\perp)}e^{-ig\frac{\theta'(x_1)}{L}x_2}e^{ig\Delta'(x_1)} \quad , \\
\Big(x_1\Big|\zeta''_{c,n}\Big)'' &= \tilde{U}''\hat{z}''_c\tilde{U}''^\dagger\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}nx_1} \quad , \quad & \tilde{U}'' &= e^{ig\tau''(x_1)}e^{-ig\frac{\theta''}{L}x_1}e^{ig\Delta''}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

und für die jeweiligen Skalarprodukte gilt

$$\Big(F_{c,n}\Big|G_{c',n'}\Big) = \int_0^L dx_3\, F^{a*}_{c,n}(\vec{x})G^a_{c',n'}(\vec{x}) \quad , \tag{B.17}$$

$$\Big(F_{c,n}\Big|G_{c',n'}\Big)' = \int_0^L dx_2\, F^{a*}_{c,n}(\vec{x})G^a_{c',n'}(\vec{x}) \quad , \tag{B.18}$$

$$\Big(F_{c,n}\Big|G_{c',n'}\Big)'' = \int_0^L dx_1\, F^{a*}_{c,n}(\vec{x})G^a_{c',n'}(\vec{x}) \quad . \tag{B.19}$$

Der Vollständigkeit halber führen wir an,

$$\tilde{\Pi}_2(\vec{x}) = \Pi_2(\vec{x}) - p_2(\vec{x}_\perp) \qquad \text{mit} \qquad p_2(\vec{x}_\perp) = \frac{1}{L}\int_0^L dx_3\,\Pi_2(\vec{x}) \quad , \tag{B.20}$$

$$\tilde{p}_1(\vec{x}_\perp) = p_1(\vec{x}_\perp) - \bar{p}_1(x_1) \tag{B.21}$$

mit

$$p_1(\vec{x}_\perp) \;=\; \frac{1}{L}\int_0^L dx_3\, \Pi_1(\vec{x}) \quad , \tag{B.22}$$

$$\bar{p}_1(x_1) \;=\; \frac{1}{L}\int_0^L dx_2\, p_1(\vec{x}_\perp) \quad . \tag{B.23}$$

Schließlich ist

$$\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \;=\; U^{(1)}_{[\xi]}\big|\mathbf{phys}\big\rangle, \tag{B.24}$$

$$\big|\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle \;=\; U^{(2)}_{[\xi']}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle, \tag{B.25}$$

$$\big|\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}}\big\rangle \;=\; U^{(3)}_{[\xi'']}\big|\widetilde{\widetilde{\mathbf{phys}}}\big\rangle. \tag{B.26}$$

Anhang C

Abweichungen in der Bezeichunungsweise von der Originalliteratur

Um die Darstellung der Eichfixierung in Axialer und Palumbo-Eichung möglichst transparent zu gestalten, sind wir teilweise von den Bezeichungsweisen in der Originalliteratur [Thi93], [Len94.2] abgewichen. Die Unterschiede in den Konventionen sollen nun hier dargelegt werden.

Axiale Eichung:

$$\text{bei uns} \quad \widehat{=} \quad \text{in [Len94.2]}$$

$$p_\perp^l(\vec{x}_\perp) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{L} p_\perp^l(\vec{x}_\perp) \tag{C.1}$$

$$\rho^{(2)}(\vec{x}_\perp) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{L} \rho^{(2)}(\vec{x}_\perp) \tag{C.2}$$

$$\Big(x_3 \Big| \zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \Big(x_3 \Big| \zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} \tag{C.3}$$

$$\tilde{A}_\perp(\vec{x}), \tilde{\Pi}_\perp(\vec{x}) \quad \longleftrightarrow \quad A'_\perp(\vec{x}), \Pi'_\perp(\vec{x}) \tag{C.4}$$

Palumbo-Eichung:

$$\text{bei uns} \quad \widehat{=} \quad \text{in [Thi93]}$$

$$p_\perp(\vec{x}_\perp) \longleftrightarrow \frac{1}{L} p_\perp(\vec{x}_\perp) \tag{C.5}$$

$$\tilde{p}_1(\vec{x}_\perp) \longleftrightarrow \frac{1}{L} p_1'(\vec{x}_\perp) \tag{C.6}$$

$$\tilde{a}_1(\vec{x}_\perp) \longleftrightarrow a_1'(\vec{x}_\perp) \tag{C.7}$$

$$\bar{p}_1(x_1) \longleftrightarrow \frac{1}{L} \bar{p}_1(x_1) \tag{C.8}$$

$$\tilde{A}_2(\vec{x}), \tilde{\Pi}_2(\vec{x}) \longleftrightarrow A_2'(\vec{x}), \Pi_2'(\vec{x}) \tag{C.9}$$

$$G^{(2)a}(\vec{x}_\perp) \longleftrightarrow \frac{1}{L} G^{(2)a}(\vec{x}_\perp) \tag{C.10}$$

$$G^{(1)a}(x_1) \longleftrightarrow \frac{1}{L^2} g\rho^{(1)a}(x_1) \tag{C.11}$$

$$G^{(0)a} \longleftrightarrow \frac{1}{L^3} g Q^a_{\text{tot}} \tag{C.12}$$

$$\rho_\theta^{(2)a}(\vec{x}_\perp) \longleftrightarrow \frac{1}{L} \rho_\theta^{(2)a}(\vec{x}_\perp) \tag{C.13}$$

$$\rho_{\theta'}^{(1)a}(x_1) \longleftrightarrow \frac{1}{L^2} \rho_{\theta'}^{(1)a}(x_1) \tag{C.14}$$

$$\rho_{\theta''}^{(0)a} \longleftrightarrow \frac{1}{L^3} Q^a_{\theta''} \tag{C.15}$$

$$\Big(x_3\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L}} \Big(x_3\Big|\zeta_{c,n}\Big)_{(\vec{x}_\perp)} \tag{C.16}$$

$$\Big(x_2\Big|\zeta'_{c,n}\Big)'_{(x_1)} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L}} \Big(x_2\Big|\zeta'_{c,n}\Big)'_{(x_1)} \tag{C.17}$$

$$\Big(x_1\Big|\zeta''_{c,n}\Big)'' \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L}} \Big(x_1\Big|\zeta''_{c,n}\Big)'' \tag{C.18}$$

Literaturverzeichnis

[Eng94] M.Engelhardt *Farbeinschluß und Thermodynamik in der* QCD_{1+1}, Doktorarbeit, Erlangen 1994.

[Eng95] M.Engelhardt and B.Schreiber, Z. Phys. **A 351** (1995) 71.

[Len91] F.Lenz, M.Thies, K.Yazaki, S.Levit, *Hamiltonian formulation of two-dimensional gauge theories on the light-cone*, Ann.Phys **208** (1991) 1.

[Len94.1] F.Lenz, H.W.L.Naus, K. Ohta, M.Thies, *Quantum Mechanics of Gauge Fixing*, Ann. Phys. **233** (1994) 51.

[Len94.2] F.Lenz, H.W.L.Naus, M.Thies, *QCD in the Axial Gauge Representation*, Ann. Phys. **233** (1994) 317.

[Lev91] S.Levit, *Topics in QCD*, Lectures held at the workshop on topics in QCD, 16.10.91-18.10.91, Waischenfeld, Germany.

[Mut87] T.Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore 1987.

[Pal86] F.Palumbo, *Quantization of Gauge Theories on a torus*, Phy. Lett. **B 173** (1986) 81.

[Pal90] F.Palumbo, *Exact evaluation of the Faddeev-Popov determinant in a complete axial gauge on a torus*, Phys. Lett. **B 243** (1990) 109.

[Pol73] H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. $\underset{\sim}{3}$0 (1973) 1346.

[Ryd87] L.H.Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press 1985.

[Sch93] B.Schreiber, *Gluonfreiheitsgrade und Hintergrundfelder der Quantenchromodynamik in einer Raumdimension*, Doktorarbeit, Erlangen 1993.

[See95] S.Seeger, *1+1 dimensionale Quantenchromodynamik auf dem Kreis in Axialer und Palumbo-Eichung*, Diplomarbeit, Erlangen 1995.

[Sto94] D.Stoll, S.Takeuchi, K.Yazaki, *The role of zero modes for the infrared behavior of QCD*, Phy. Lett. **B 338** (1994) 313.

[Thi93] M.Thies, *Notes on the Palumbo Gauge* (unpublished).

[Tun85] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore 1985.